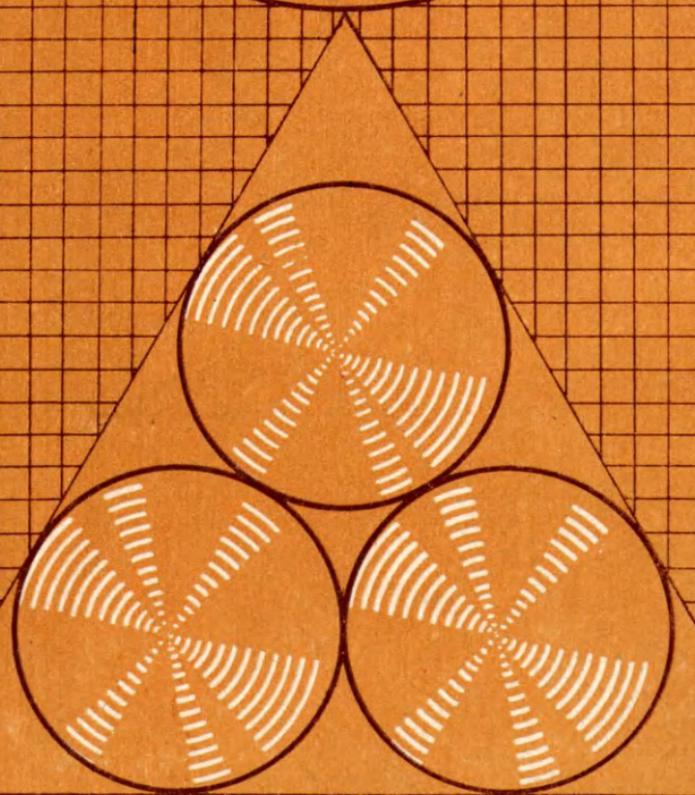
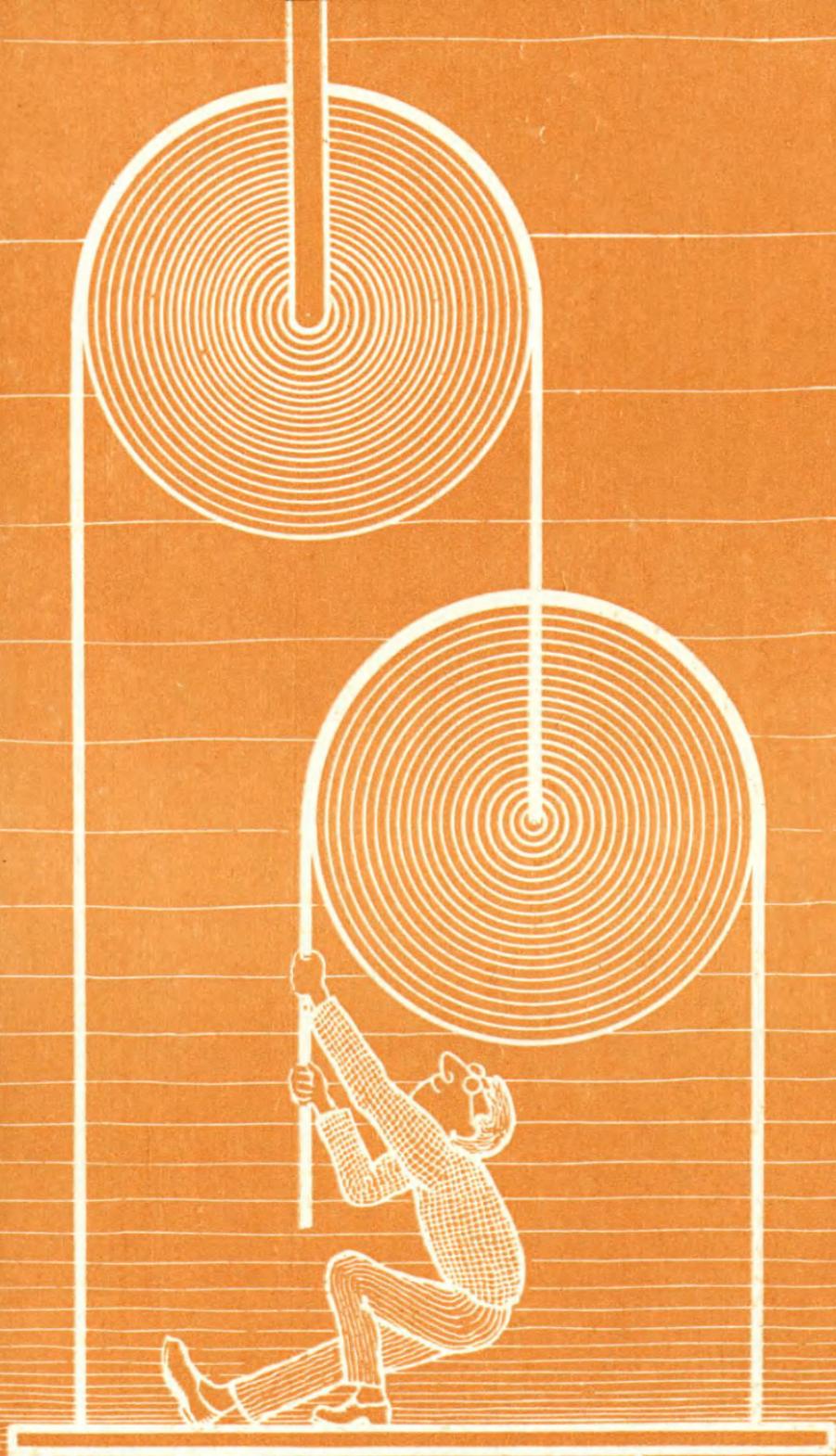


В. Торшиковский

**ПОЛЬСКИЕ
ФИЗИЧЕСКИЕ
ОЛИМПИАДЫ**

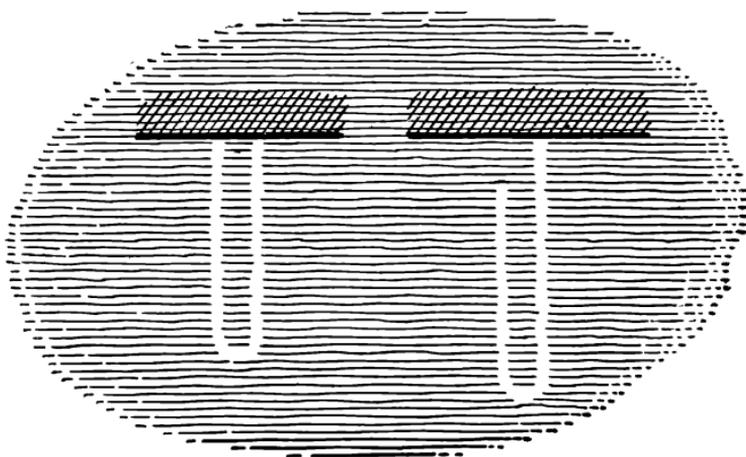






Waldemar Gorzkowski

**25 LAT
OLIMPIAD
FIZYCZNYCH**



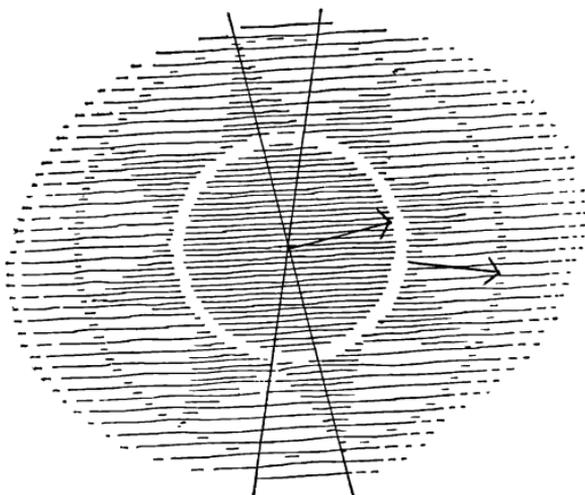
WARSZAWA 1979
WYDAWNICTWA SZKOLNE I PEDAGOGICZNE

ЗАДАЧИ И ОЛИМПИАДЫ

В. Торшковский

**ПОЛЬСКИЕ
ФИЗИЧЕСКИЕ
ОЛИМПИАДЫ**

Перевод с польского
Е. Н. Доброславской
под редакцией канд. физ.-мат. наук
Е. Л. Суркова



МОСКВА «МИР»
1982

ББК 22.3
Г 70
УДК 530.1

Scan+DjVu: AlVaKo
24/11/2023

Горшковский В.

- Г 70 Польские физические олимпиады: Пер. с польск./Пер. Доброславской Е. Н.; Под ред. и с предисл. Е. Л. Суркова. — М.: Мир, 1982. — 256 с., ил. — (Задачи и олимпиады).

Книга польского физика В. Горшковского — первый сборник задач по физике в серии «Задачи и олимпиады», выпускаемой издательством «Мир» с 1975 г. Сборник содержит около ста задач из различных разделов физики, которые давались на заключительных турах олимпиад по физике в ПНР.

Предназначен для школьников и преподавателей, интересующихся физикой и физическими олимпиадами.

$\frac{1701000000-102}{041(01)-82}$ 164—82, ч. 1

ББК 22.3
53

Редакция научно-популярной и научно-фантастической литературы

© Copyright by Wydawnictwa
Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1979

© Перевод на русский язык, «Мир», 1982

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Научно-технический прогресс, непрерывно растущая во всем мире потребность в высококвалифицированных кадрах в области естественных и технических наук вызвали к жизни новые формы популяризации и пропаганды естественнонаучных знаний. Одной из таких форм являются физические, математические и химические олимпиады для школьников, которые проводятся во многих странах. В их организации вместе с работниками школы участвуют ученые, преподаватели и студенты высших учебных заведений, заинтересованных в отборе способной и талантливой молодежи для дальнейшего обучения. Широкое распространение и массовость олимпиад имеют и другое, еще более важное значение — они способствуют повышению активного интереса к естественным наукам со стороны учащихся средней школы. Именно этим объясняется быстрое развитие олимпиадного движения, которое сегодня приняло международный характер — регулярно проводятся международные олимпиады по математике, физике и химии. История школьных олимпиад насчитывает уже несколько десятилетий, и опыт других стран, безусловно, полезен как тем, кто проводит олимпиады, так и тем, кто в них участвует. Поэтому перевод на русский язык книги Вальдемара Горшковского «Польские физические олимпиады», как нам кажется, привлечет к себе внимание тех, кто интересуется физическими олимпиадами.

Польша имеет богатые олимпиадные традиции. Первая олимпиада по физике была организована Польским физическим обществом еще в 1951 г., и с тех пор олимпиады проводятся в ПНР ежегодно. (Именно по инициативе Польши в 1968 г. была

организована 1-я Международная физическая олимпиада, в которой теперь участвуют как социалистические, так и многие капиталистические страны.)

Физические олимпиады проходят в Польше в три тура, в них участвуют школьники 10—11 классов и учащиеся 3—4-х курсов лицеев и техникумов. Первый тур — заочный, в нем принимают участие все желающие. Главный комитет олимпиады рассылает по учебным заведениям условия задач, а их письменные решения участники направляют для проверки в Окружные комитеты олимпиады. Второй тур проводится в окружных центрах (их 12) и состоит из теоретической и экспериментальной частей. Победителей второго тура приглашают в Варшаву, где в течение двух дней проходит заключительный, третий тур, также включающий теоретические и экспериментальные работы. Победители заключительного тура (обычно их около двадцати человек) получают право поступления в любой вуз страны без экзаменов. Из них же формируется команда на Международную физическую олимпиаду. Олимпиадное движение в ПНР с каждым годом принимает все более массовый характер. Об этом говорят хотя бы следующие цифры. В 1951 г. в первом туре физической олимпиады участвовал 351 человек, во втором — 209, в третьем — 50. В 1976 г. в первом туре было 3450 участников, во втором — 970, в третьем — 78. Руководящим органом олимпиады является Главный комитет, в функции которого входит также отбор задач в «Банк задач», используемый по мере надобности. Автором задачи может быть любой человек — от профессора до школьника.

Читателю будет, вероятно, интересно хотя бы вкратце познакомиться с историей олимпиадного движения в нашей стране. Первая олимпиада по физике была организована в Московском университете в 1938 г. До войны и в первые послевоенные годы олимпиады проводились фактически только в больших городах, имеющих сильные университеты. Значительный рост олимпиадного движения произошел в конце 50-х — начале 60-х годов, когда благодаря усилиям преподавателей, студентов и аспирантов ведущих вузов страны — Московского, Новосибирского, Ленинградского университетов, Московского физико-технического института, — а также Министерства просвещения СССР

разрозненные олимпиады разных городов и вузов выросли во Всесоюзные олимпиады по физике, математике и химии. Они проходят в несколько туров. Первый тур — это школьные олимпиады, в которых могут принять участие все желающие. Проводятся они школьными учителями. Победители затем участвуют в следующих турах — районном, областном, республиканском и, наконец, в заключительном туре Всесоюзной олимпиады, который обычно проводится в разных городах нашей страны. В олимпиадах участвуют ученики 8—10 классов, и из десятиклассников — победителей заключительного тура формируется команда для Международной физической олимпиады. Все члены команды обычно освобождаются от приемных экзаменов в вуз.

Предлагаемая вниманию читателя книга В. Горшковского представляет собой юбилейный сборник, посвященный 25-летию Польских физических олимпиад. В ней собраны наиболее интересные и полезные для школьников задачи, дававшиеся на заключительных турах олимпиад на протяжении 25 лет, с 1951 по 1976 г. Эти задачи относятся к разным разделам физики, но распределение их по главам в данной книге нетрадиционно: задачи собраны в разделы, объединенные каким-либо общим мотивом (например, задачи о «полотере»). Больше всего в сборнике задач по механике и электричеству, меньше — по оптике, и практически не представлена молекулярная физика. Некоторые задачи уже известны советскому читателю. Следует заметить, что вопрос об авторстве предлагаемых на олимпиадах задач часто оказывается непростым. Многие из них имеют характер международного физического фольклора и незаметно кочуют из страны в страну и из задачника в задачник, претерпевая лишь некоторые изменения в формулировках. Подобные задачи читатель может встретить также и в книге «Польские физические олимпиады». Но в ней есть и новые задачи, способные доставить удовольствие как начинающему олимпиадному бойцу, так и опытному члену жюри. Все задачи решены очень подробно и обстоятельно, что делает книгу полезной для организаторов школьных олимпиад и доступной для самих школьников и студентов младших курсов, любящих физику и занимающихся самообразованием.

Здесь нужно отметить, что среднее образование в Польше одиннадцатилетнее и программа средней школы по физике шире, чем в нашей стране. Она включает, например, такие разделы, как законы Кирхгофа для разветвленных цепей, момент импульса, момент инерции и уравнения вращения твердого тела, что нашло свое отражение в сборнике. Задачи, выходящие за рамки нашей школьной программы, отмечены в тексте звездочкой.

Мы надеемся, что книга В. Горшковского «Польские физические олимпиады» привлечет к себе внимание школьников, студентов и преподавателей — всех, кто интересуется физикой, задачами по физике и физическими олимпиадами.

В заключение мы хотим порекомендовать несколько книг, которые помогут заинтересованному читателю ознакомиться с характером задач, предлагаемых участникам физических олимпиад, проводимых в нашей стране.

1. Буховцев Б. Б., Кривченко В. Д., Мякишев Г. Я., Сараева И. М. Сборник задач по элементарной физике. — М.: Наука, 1974.

2. Савин А. П., Брук Ю. М., Зильберман А. Р. Физико-математические олимпиады. — М.: Знание, 1977.

3. Слободецкий И. Ш., Асламазов Л. Г. Задачи по физике. — М.: Наука, библиотечка «Квант», вып. 5, 1980.

4. Слободецкий И. Ш., Орлов В. А. Задачи по физике. — М.: Просвещение, 1982.

5. Шаскольская М. П., Эльцин И. А. Сборник избранных задач по физике. — М.: Наука, 1969.

Е. Сурков

ЗАДАЧИ

Введение

Читателю, вероятно, интересно узнать, откуда берутся олимпиадные задания, чем руководствуются авторы при составлении задач и вообще почему именно те, а не иные задачи попадают на конкурс.

Автором олимпиадной задачи может быть каждый. Среди авторов есть профессора университетов, ученые, студенты и даже школьники. Большинство задач обычно предлагается членами Главного комитета школьных олимпиад, но, безусловно, не обязательно быть членом Комитета, чтобы составленная вами задача имела шанс попасть на конкурс. Для организаторов олимпиад прежде всего важны достоинства задачи, а не ее автор. Автором олимпиадной задачи можешь стать и ты, юный читатель. Составление задач — во всех отношениях намного более полезное и поучительное занятие, чем решение уже имеющихся. Попробуйте же свои силы!

Какой должна быть олимпиадная задача? Прежде всего, интересной и поучительной. Интересной — поскольку, чтобы привлечь внимание подростка к какому-то предмету, необходимо пробудить его любопытство, поучительной — чтобы она могла принести пользу в будущем. Чрезвычайно желательны задачи, содержащие сведения из разных разделов физики, а также «обучающие» задачи — в том числе экспериментальные, для выполнения которых приходится использовать несложную аппаратуру либо подручные материалы. Последних задач очень мало, и поэтому их рассматривают с особым интересом.

Очевидно, что недостаточно просто составить задачу — ее следует самому решить. Часто в ходе решения выясняются недостатки текста, его необоснованность

и т. д. Нередко случается, что при решении сам автор вынужден задачу дисквалифицировать. Поэтому Главный комитет не принимает задач без решений. В случае экспериментальных задач от автора не требуется выполнения измерений, однако сущность измерений и мотивировка рекомендуемого метода должны быть теоретически обоснованы.

Составление задач — дело нелегкое, в чем читатель без труда может убедиться сам, если возьмется за это интересное дело. Здесь нет никаких готовых рецептов. Чаще всего задачи рождаются при анализе различных проблем: по мере углубления решения какой-либо первичной проблемы она разрастается, выясняются ее связи с другими проблемами, возникают новые проблемы, при этом время от времени появляются вопросы, которые могут представлять интересную теоретическую или экспериментальную задачу. Здесь важно подчеркнуть, что, как правило, при составлении задачи автор не имеет сразу ее готовой концепции. Большинство задач рождается в результате долгих и глубоких размышлений.

Задачи, предложенные Главному комитету, направляются на рецензию. Цель рецензии — произвести полный анализ задачи, определить ее оригинальность, указать недостатки и способы их возможного устранения, отметить достоинства, проверить соответствие задачи возможностям учащихся средней школы и т. д. Авторами рецензий являются члены Главного комитета олимпиады либо лица, уполномоченные Комитетом. Задачи, недостаточно оригинальные, неинтересные, неверно описывающие явление, слишком трудные, слишком легкие или по каким-то другим причинам не имеющие шансов попасть на конкурс, отвергаются. Но это не означает, что абсолютное большинство олимпиадных задач оригинально. Некоторые уже известные задачи, но в несколько измененном виде, могут быть использованы, например, в первом туре олимпиады. Однако число таких задач ограничено. В основном же, согласно принятым требованиям, олимпиадные задачи должны быть оригинальными и не содержаться в широко доступных сборниках задач, учебниках, пособиях и т. д.

Задачи, получившие положительные рецензии, приобретаются для «Банка задач», где ждут своей оче-

реди на использование. В Банке обычно находится несколько десятков задач из разных разделов физики. Следует признать, что не все разделы представлены одинаково. Больше всего задач из механики, электричества, оптики. Что же касается задач из менее традиционных разделов, а также экспериментальных заданий, то постоянно ощущается их нехватка, и мы советуем учесть это при составлении задач. Банк задач существует с 1969 г. Он сделал возможным свободный и рациональный подбор вариантов на конкурс. Варианты задач различаются по уровню сложности. Учитывается, что участники обладают различной глубиной знаний и разными возможностями.

Содержание задач, использованных на олимпиадах, вообще говоря, отличается от содержания присланных задач. Изменения вносятся в текст задач по рекомендации рецензентов, а также в ходе обсуждений на заседаниях Главного комитета олимпиады. Нередко эти изменения довольно существенны. Очень многое зависит от правильности формулировки задачи. Одну и ту же проблему можно сформулировать способом, либо поощряющим к размышлению, либо, наоборот, затрудняющим правильный подход к решению. Окончательная формулировка задачи создается усилиями нескольких лиц: автора, рецензентов, членов Главного комитета. Поэтому все задачи в целом находятся в ведении Главного комитета.

При составлении этого сборника автор стоял перед трудной проблемой выбора нескольких десятков задач из множества уже использованных или рекомендованных к использованию. Принимая во внимание, что настоящая книга предназначена в первую очередь для школьников, в том числе и для подготовки к олимпиадным конкурсам, автор отобрал задачи, которые, на его взгляд, могут оказаться наиболее полезными. Текст задач в целом не подвергался изменениям. Лишь в некоторых задачах, использованных на первых олимпиадах, потребовалось изменить формулировку так, чтобы придать книге цельный характер. Задачи поделены на несколько разделов, что должно облегчить читателю работу над ними; однако это деление не имеет ничего общего с традиционным делением физики на разделы.

Электрические цепи

1. Двадцать одинаковых резисторов r соединены так, как показано на рис. 1. Определить сопротивление между точками A и B .

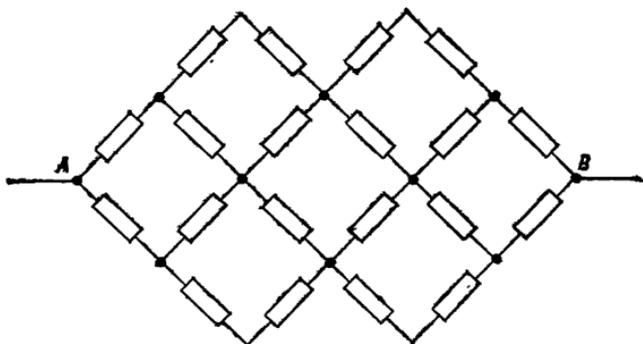


Рис. 1

2. Резисторы r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 соединены по схеме, показанной на рис. 2. Определить сопротивление между точками A и B . Можно ли определить искомое

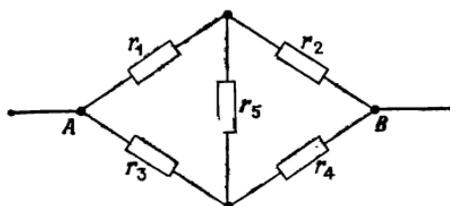


Рис. 2

сопротивление, представив указанную схему в виде параллельных и последовательных соединений тех же резисторов r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 ?

3. Дана бесконечная плоская проводящая сеть с квадратными ячейками (рис. 3). Сопротивление каждого прямолинейного проводника, соединяющего два ближайших узла сети, равно r . Определить сопротивление между точками A и B в этой сети.

4. Две катушки с током могут взаимодействовать таким образом, что изменение тока в одной из них вызывает появление э. д. с, в другой, и наоборот, Ме-

рой этого взаимодействия является коэффициент взаимной индукции $M > 0$. Дополнительная э. д. с., индуцированная в первой катушке, будет равна $\pm M dI_2(t)/dt$, а во второй $\pm M dI_1(t)/dt$, где $I_1(t)$ и

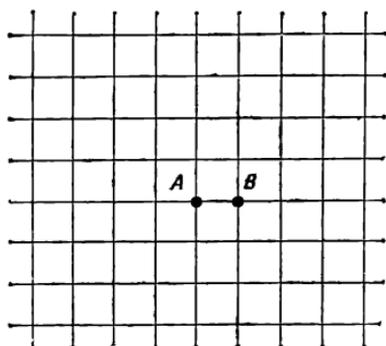


Рис. 3.

$I_2(t)$ — силы тока в первой и во второй катушках соответственно. Знак индуцированной э. д. с. определяется по правилу Ленца.

Пользуясь указанными данными, определить эквивалентную индуктивность L_{AB} схемы, представленной на рис. 4. Изменится ли (если да, то на сколько) полученное значение, если полярность одной из катушек

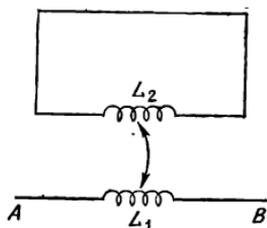


Рис. 4

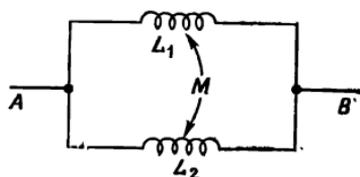


Рис. 5

изменить на противоположную? Какое наибольшее значение может иметь коэффициент взаимной индукции M ? Объяснить полученный результат.

5. Пользуясь данными предыдущей задачи, определить индуктивность L_{AB} схемы, изображенной на рис. 5. Положение катушек и направление намотки

указано на рисунке. Изменится ли результат, если изменить направление намотки на противоположное?

6. Определить общее сопротивление R_{AB} резисторов, соединенных в куб, как показано на рис. 6.

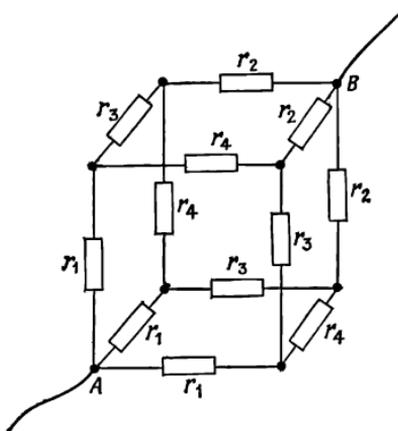


Рис. 6

7. Какому необходимому и достаточному условию должны удовлетворять сопротивления $r_1, r_2, r_3, R_1, R_2, R_3$, чтобы участок контура, изображенный на рис. 7, а, был эквивалентен участку, изображенному на рис. 7, б?

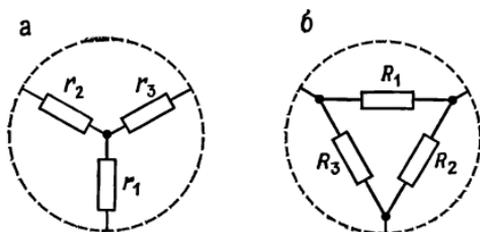


Рис. 7

Другими словами, какое необходимое и достаточное условие должно выполняться, чтобы замена одного участка другим в любом случае не приводила к изменению напряжения и величин тока в цепи, находящейся за пределами пунктирной окружности?

8. Плоский конденсатор, обкладки которого имеют форму квадрата со стороной a и расположены на рас-

стоянии $d \ll a$ друг от друга, заполнен диэлектриком, имеющим форму бруска размерами $a \times a \times d$, сложенного из трех материалов так, как показано на рис. 8. Какова емкость C этого конденсатора? Какова должна быть диэлектрическая постоянная однородного диэлектрика размерами $a \times a \times d$, чтобы при помещении его между обкладками конденсатора емкость

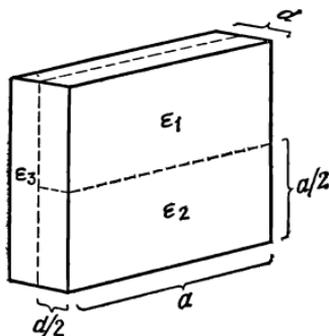


Рис. 8

последнего не изменилась по сравнению с предыдущим случаем? Изменится ли емкость конденсатора, если поверхность, отделяющая диэлектрик с проницаемостью ϵ_3 от диэлектриков с проницаемостью ϵ_1 и ϵ_2 , будет проводящей?

9. Двигатель постоянного тока мощностью $P = 150$ Вт, рассчитанный на работу при напряжении 15 В, питается от сухих элементов, каждый из которых имеет э. д. с. $\mathcal{E} = 1,5$ В и внутреннее сопротивление $R = 0,45$ Ом. Какое наименьшее количество элементов потребуется, чтобы двигатель работал в соответствии со своими расчетными параметрами? Как следует соединить элементы в батарею?

10. Можно ли соединить n одинаковых резисторов r в одну цепь с двумя выводами и эквивалентным сопротивлением R таким образом, чтобы величина сопротивления R не изменилась при подключении к цепи как целому еще двух таких же резисторов r ?

11. Три одинаковых резистора r соединены в одну цепь, сопротивление которой равно R . При подключении к этой цепи как целому еще двух резисторов r

сопротивление цепи уменьшается в семь раз. Нарисовать схему соединения всех пяти резисторов.

12*. Два элемента с э. д. с. \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 и внутренними сопротивлениями r_1 и r_2 (рис. 9, а) заменены одним элементом с э. д. с. \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r

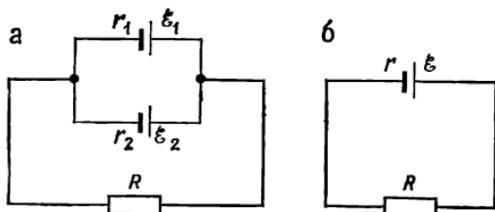


Рис. 9

(рис. 9, б) так, что падение напряжения на внешнем сопротивлении R в обоих случаях одинаково вне зависимости от величины этого сопротивления. Как \mathcal{E} и r связаны с \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 , r_1 и r_2 ? Напишите выражение для \mathcal{E} и r в общем случае, когда заменяются не два, а n источников с э. д. с. \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 , ..., \mathcal{E}_n и внутренними сопротивлениями r_1 , r_2 , ..., r_n .

13. Собрана схема, показанная на рис. 10.

а) Какие процессы происходят в контуре сразу после замыкания ключа K и через значительное время

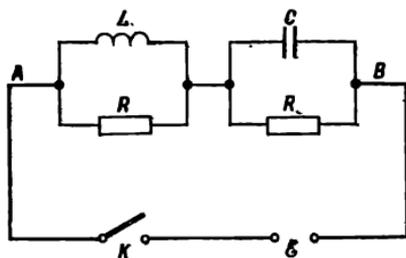


Рис. 10

после его замыкания, если э. д. с. постоянна и равна \mathcal{E} .

б) Доказать, что если $R^2 = L/C$, то независимо от характера изменения э. д. с. \mathcal{E} со временем часть контура между точками A и B при замыкании ключа K ведет себя как омическое сопротивление. Определить величину этого сопротивления.

14. Каким должен быть резистор X , чтобы сопротивление R_{AB} участка цепи, состоящей из одинаковых звеньев (рис. 11), не зависело от числа звеньев?

15. На трех легких пружинах, имеющих коэффициенты упругости k_1 , k_2 и k_3 , висит гирька массой m

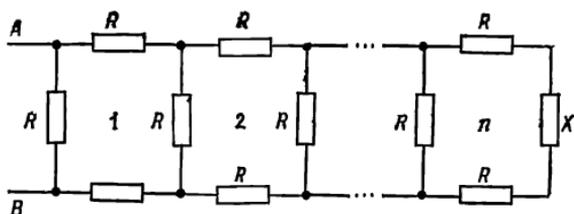


Рис. 11

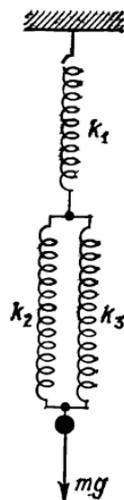


Рис. 12

(рис. 12). Выведенная из положения равновесия гирька начинает колебаться вдоль вертикальной оси. Какого типа колебания совершает гирька и каков их период?

Коэффициентом упругости k называется коэффициент пропорциональности между силой упругости F и растяжением пружинки x ; $F = kx$.

Соударения

1. Имеется два маленьких электрически заряженных шарика с массами m_1 и m_2 . Заряд каждого из шариков равен Q . Когда шарики находились далеко друг от друга, первому из них сообщили скорость \vec{v} , направленную к другому шарика. Скорость второго шарика в этот момент равнялась 0. Найти минимальное расстояние, на которое сблизятся шарики, предполагая, что с момента t_0 единственными силами, действующими на шарики, являются силы их взаимного электрического отталкивания.

При расчетах принять:

а) $Q = 10^{-6}$ Кл, $v = 10$ м/с, $m_1 = 1$ г, $m_2 = 9$ г;

б) $Q = 10^{-6}$ Кл, $v = 10$ м/с, $m_1 = 9$ г, $m_2 = 1$ г.

Сравнить величины минимальных расстояний между шариками, полученные в этих двух случаях. Такой же вывод можно было бы сделать на основании общего физического принципа. О каком принципе идет речь?

Коэффициент $1/4 \pi \epsilon_0$, появляющийся в формуле для силы Кулона, равен $9 \cdot 10^9$ Н·м²/К².

2*. В протонном ускорителе протоны приобретают кинетическую энергию, равную E . Узкий пучок, выведенный из ускорителя, направляют на металлический шар радиусом r , установленный далеко от ускорителя

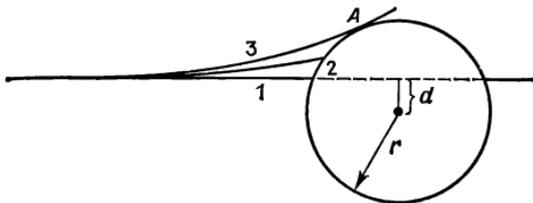


Рис. 13

так, что центр шара не лежит на прямой, вдоль которой протоны вылетают из ускорителя (рис. 13). Расстояние от центра шара до этой прямой равно d ($d < r$). Какой величины достигнет потенциал шара после достаточно долгой работы ускорителя?

Выполнить расчеты, приняв $E = 2$ кэВ и $d = r/2$. Что изменится, если протоны заменить электронами?

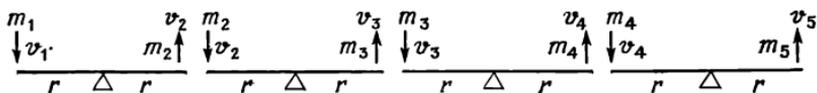


Рис. 14

3. Пять акробатов, имеющих массы 60, 50, 40, 30 и 20 кг, выполняют цирковой номер на качелях-трамплинах, расположенных один за другим. Самый тяжелый акробат прыгает на первый трамплин с высоты 2 м (рис. 14). Вторым, третьим и четвертым акробаты по очереди подпрыгивают вверх и прыгают на сле-

дующий трамплин. Определить, на какую высоту h_5 подпрыгивает последний акробат.

Принять, что работа мышц акробатов полностью расходуется на преодоление силы трения и что массой трамплина можно пренебречь.

4*. На плоском гладком столе лежит однородный стержень длиной $2l$ и массой M (рис. 15). По столу перпендикулярно стержню движется (не катится) маленькая шайба (материальная точка) массой m , которая ударяется о конец стержня. В результате стержень смещается, совершая при этом вращательное

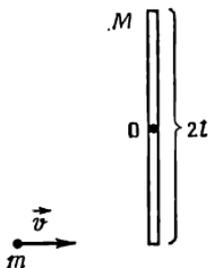


Рис. 15

движение. Повернувшись на пол-оборота, стержень другим своим концом ударяет по шайбе. Такая ситуация может возникнуть только при определенном соотношении масс $\mu = M/m$ ($m \neq 0$). Определить это соотношение. Каковы скорости стержня и шайбы после последнего соударения? Считается, что стержень и шайба движутся по столу без трения и соударения абсолютно упруги. Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его середину, равен $I = \frac{1}{3}Ml^2$.

Примечание. Считать, что линейные скорости центра масс стержня и шайбы до соударения, во время него и после него параллельны между собой.

5. При определенных условиях фотон превращается в пару электрон + позитрон

$$\gamma \rightarrow e^- + e^+$$

а) Может ли этот процесс происходить в вакууме без взаимодействия с другими частицами или полями?

б) Предположив, что данный процесс происходит вблизи частицы с очень большой массой, определить минимальную энергию (частоту) фотона, ниже которой получение пары $e^- + e^+$ невозможно.

Значения постоянной Планка, скорости света и массы электрона можно найти в таблицах.

6. Маятник в виде медной гири, подвешенной на тонкой, невесомой и нерастяжимой нити, сделанной из материала, не проводящего электрический ток и тепло, помещен в вакуум. Маятник движется в неоднородном магнитном поле (например, в поле постоянного магнита) в плоскости, перпендикулярной силовым линиям магнитного поля. В начальный момент маятник отклонен на угол 60° от положения равновесия, а его температура равна 20°C . Какова будет температура маятника в момент, когда он остановится? Длина маятника $l = 1$ м, ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с², теплоемкость меди $c = 0,386$ Дж/г·К. Предполагается, что напряженность магнитного поля не изменяется.

7. Кубик бросают в абсолютно упругую стену так, что одна из граней кубика параллельна стене, а направление его скорости \vec{v} составляет угол α с нормалью к стене. Коэффициент трения кубика о стену равен $f = \sqrt{3}/6$. Определить зависимость угла β , под которым кубик отскакивает от стены, от угла падения α . Начертить график функции $\beta(\alpha)$.

8*. Шарик для настольного тенниса летит со скоростью \vec{v} , вращаясь вокруг горизонтальной оси (перпендикулярной направлению скорости движения) с угловой скоростью $\omega = xv/R$, где R — радиус шарика (рис. 16). Коэффициент трения шарика о поверхность ракетки равен $f = 3/4$. Предполагается, что деформациями шарика и ракетки в момент соударения можно пренебречь и что перпендикулярная к ракетке составляющая скорости шарика после отражения не изменяется по абсолютной величине. Определить угол α , под которым следует поставить ракетку по отношению к направлению полета шарика, чтобы скорость шарика после отражения была направлена парал-

лельно и противоположно исходной. Ракетку считать неподвижной.

Исследовать зависимость полученного результата от параметра x и построить график функции $\alpha(x)$. Сопротивлением воздуха пренебречь и считать, что сила

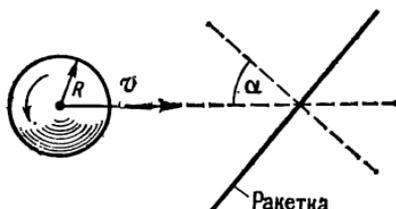


Рис. 16

трения между шариком и ракеткой действует только в случае проскальзывания.

Момент инерции шарика относительно оси, проходящей через его центр, равен $I = \frac{2}{3}MR^2$, где M — масса, а R — радиус шарика.

Колебания

1. Если сила есть функция координаты, то с математической точки зрения второй закон механики Ньютона устанавливает связь между ускорением (второй производной координаты по времени), действующей силой и массой.

Аналогичные уравнения могут возникать и в задачах немеханического типа.

Рассмотрим контур, состоящий из конденсатора емкостью C (в начальный момент его заряд равен q) и катушки с индуктивностью L . Мгновенное значение тока можно определить по скорости изменения заряда Q на обкладке конденсатора. В свою очередь э. д. с. самоиндукции простым образом выражается через скорость изменения тока. Если выразить напряжение на конденсаторе через заряд Q и воспользоваться соответствующим законом Кирхгофа для контура, не имеющего активного сопротивления, то можно получить связь между «ускорением» заряда и самим зарядом. Пользуясь теперь механическими аналогами, ответьте на следующие вопросы:

а. По какому закону сила тока зависит от времени?

- б. Чему равен период колебания контура?
 в. Какова максимальная величина силы тока?
 г. Можно ли провести аналогию между резистором R (включенным в контур последовательно с индуктивностью L) и некой дополнительной силой (какой?) в соответствующей задаче механики?
 д. Можно ли этим же методом определить зависимость силы тока от времени в контуре, состоящем из источника тока с постоянной э. д. с. и ничтожно малым внутренним сопротивлением, подключенного к катушке с индуктивностью L ?

2. Имеется контур, составленный из конденсатора емкостью C (вначале незаряженного), катушки индуктивности L с активным сопротивлением $R = 0$ и батареи источников э. д. с. \mathcal{E} с ничтожно малым внутренним сопротивлением, подключенной через неоновую лампу \mathcal{L} (рис. 17). Неоновая лампа ведет себя как

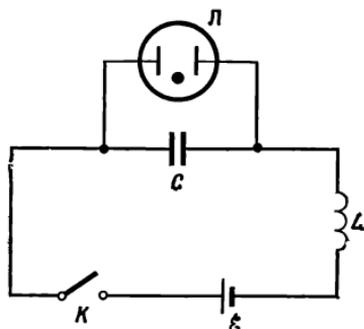


Рис. 17

изолятор, когда напряжение на ее зажимах меньше напряжения зажигания $U_{\text{заж}}$. При превышении напряжения зажигания через лампу очень быстро происходит разряд конденсатора, в результате напряжение на лампе падает до напряжения гашения $U_{\text{гаш}}$, и она снова перестает проводить электрический ток. Время разряда конденсатора через неоновую лампу так мало, что изменением тока в катушке за этот период можно пренебречь.

Доказать, что при значениях $\mathcal{E} = 34$ В, $U_{\text{заж}} = 64$ В, $U_{\text{гаш}} = 22$ В при замыкании ключа K неоновая лампа вспыхнет только один раз. Чему будет равно после этого напряжение на конденсаторе?

Указание. При решении имеет смысл воспользоваться электромеханической аналогией, приведенной в предыдущей задаче.

3. Два параллельных одинаковых валика вращаются с равными скоростями в направлениях, показанных на рис. 18. На валики горизонтально положена доска весом P , центр которой несколько смещен

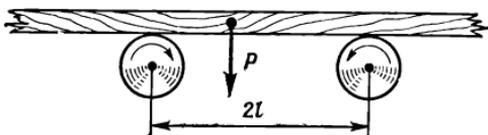


Рис. 18

относительно середины расстояния между валиками. Расстояние между осями валиков равно $2l$. Коэффициент трения доски между валиками и доской равен f . Как движется доска? Вывод обосновать вычислениями.

4. Два небольших тела с массами m_1 и m_2 соединены однородной пружиной с коэффициентом упругости k и положены на горизонтальный гладкий стол. Раздвигая оба тела, пружину растягивают, после чего тела одновременно отпускают. Система начинает колебаться вдоль прямой линии. Что это за колебания и каков их период?

5. На тонкой легкой нити подвешен грузик, под тяжестью которого нить удлинилась на $\Delta x_0 = 10$ см. Определить период малых вертикальных колебаний этого грузика после вывода его из положения равновесия, если известно, что сила, с которой нить действует на грузик, выражается формулой

$$F = -k_1 \Delta x - k_2 (\Delta x)^3,$$

где Δx — приращение длины нити, а коэффициенты k_1 и k_2 имеют значения: $k_1 = 294$ Н/м, $k_2 = 9800$ Н/м³. Как изменится период колебаний, если изменить массу грузика?

6. Ньютон доказал, что на тела, расположенные внутри однородной сферы, последняя не оказывает гравитационного воздействия. Однако такая сфера

воздействует на тела, расположенные вне ее, причем так, как если бы вся масса сферы была сосредоточена в ее геометрическом центре.

Представьте себе шахту, проходящую сквозь земной шар вдоль оси его вращения. Считаем, что Земля — однородный шар и что при решении можно пренебречь трением, сопротивлением воздуха и т. п.

а. Как будет двигаться тело, свободно брошенное в шахту с поверхности Земли? Вывод подтвердить расчетом.

б. С какой начальной скоростью следует бросить тело из центра Земли, чтобы оно достигло ее поверхности?

в. Предположим, что вблизи поверхности Земли вдоль меридиана проходит орбита спутника. Тело свободно брошено в шахту в момент, когда спутник пролетал над шахтой. Что раньше достигнет противоположного отверстия шахты: спутник или брошенное тело?

г. Существенно ли то, что шахта проходит вдоль оси вращения Земли?

7. На вершине достаточно высокой башни находится лифт, к потолку которого прикреплен один конец невесомой пружины длиной $l = 1$ м. К пружине подвешен груз массой $m = 1$ кг, что вызвало ее растяжение на величину $\Delta l = 9,81$ см. Лифт начинает падать с ускорением $1/2g$ ($g = 9,81$ м/с²) и падает в течение $t = \pi$ с; затем включается тормоз, и лифт движется замедленно с ускорением $-1/2g$ до полной остановки.

Определить движение груза на пружине относительно лифта. В частности, объяснить, что произойдет с ним сразу после начала торможения лифта. Как изменится ответ, если время падения лифта будет иным?

Трением и сопротивлением воздуха при движении груза пренебречь.

8. Математический маятник совершает гармонические колебания с малой амплитудой. Период колебания не зависит от амплитуды (колебания изохронны). Если амплитуда колебания математического маятника не слишком мала, период зависит от амплитуды. Доказать, что в общем случае период колеба-

ния меняется монотонно в зависимости от амплитуды и что минимальный период соответствует амплитуде, близкой к нулю.

Примечание. При не столь малых колебаниях уравнение движения математического маятника не имеет решения в элементарных функциях. Поэтому попытки решить задачу аналитическим путем в этом случае обречены на неудачу. Следует найти другой способ решения. Целесообразнее соответствующим выбором единиц длины свести колебания с разными амплитудами к колебаниям, амплитуды которых выражаются одинаковыми числами.

9*. Однородная тонкая квадратная пластина массой M со стороной a свободно подвешена за одну из вершин и колеблется в собственной плоскости в поле силы тяжести. В каком месте диагонали, проходящей через точку подвеса пластины (кроме, конечно, самой точки подвеса), к пластине можно приклеить точечную массу m так, чтобы движение пластины не изменилось? Момент инерции квадратной пластины массой M со стороной a относительно оси, перпендикулярной к пластине и проходящей через ее центр O , равен $I_0 = \frac{1}{6}Ma^2$.

10. Тележка, на которой закреплен маятник, совершающий колебания с периодом $0,5$ с, съезжает по наклонной плоскости, а затем движется по горизонтальному пути. Угол между наклонной плоскостью и горизонталью равен 45° . Каков период колебания маятника, когда

а) тележка съезжает по наклонной плоскости;

б) движется по горизонтальному участку пути.

Считать, что тележка во время движения по наклонной плоскости и по горизонтальному пути не испытывает действия силы трения и что движения маятника не влияют на движение тележки (тележка тяжелая, маятник легкий).

«Полотер»

В трех следующих задачах рассматриваются явления, характерные для работы электрического полотера. Отсюда и название этой группы задач.

1. На горизонтальном плоском столе лежит плоский однородный тонкий диск (рис. 19), свободно вращающийся вокруг своей оси с некоторой угловой скоростью.

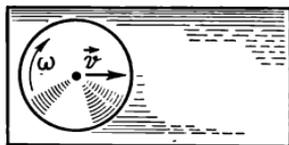


Рис. 19

ростью. Коэффициент трения диска о стол отличен от нуля. Доказать, что движение центра диска будет поступательным.

2. По горизонтальному плоскому столу движется тонкий однородный диск массой m и радиусом r . Линейная скорость центра диска равна \vec{v} . Угловая скорость вращения диска относительно оси, проходящей через центр симметрии, равна ω (см. рис. 19). Коэффициент трения движущегося диска о стол не зависит от скорости и равен f . Определить силу, тормозящую движение диска, если $v \ll \omega r$.

Указание. Обратите внимание, что сложное движение диска (вращательное и поступательное) можно представить как вращательное движение относительно движущейся мгновенной оси вращения. Задачу легче решить, если принять во внимание, что составляющая силы трения, параллельная \vec{v} и действующая на определенную часть диска, равна нулю. Поэтому достаточно рассчитать параллельную \vec{v} составляющую сил трения, приложенных к остальной части диска.

3. На горизонтальном столе лежит тонкое однородное кольцо массой m и радиусом r . Кольцо вращается вокруг собственной оси симметрии (направленной вертикально) с угловой скоростью ω . Одновременно центр движется со скоростью $v = \omega r$. Коэффициент трения движущегося кольца о стол равен f . Определить величину силы F , тормозящей поступательное движение кольца, а также момент силы M , тормозящий его вращательное движение.

Отражение и преломление

1. Цилиндрический сосуд с ртутью поставлен на середину горизонтального диска, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω . Через некоторое время поверхность ртути становится вогнутой. Доказать, что параллельный пучок лучей, падающий сверху вдоль оси вращения сосуда, после отражения от поверхности ртути соберется в одну точку. Определить положение этой точки. Сравнить свойства ртутного зеркала со свойствами обычного вогнутого сферического зеркала. Деформацией поверхности зеркала, вызванной силами поверхностного натяжения, пренебречь.

2. Определить форму поверхности плоско-выпуклой линзы, которая фокусирует параллельный пучок лучей, не создавая сферической аберрации. Свет падает перпендикулярно к плоской поверхности линзы. Определить максимальную толщину линзы в центре при следующих параметрах: радиус линзы $r = 5$ см, расстояние от фокуса до плоской поверхности линзы $f = 12$ см, коэффициент преломления стекла n равен 1,5.

Указание. Эту задачу проще решать с точки зрения волновой теории.

3. Горизонтально расположенное цилиндрическое вогнутое зеркало с радиусом кривизны $R = 60$ см наполнено водой. Определить фокусное расстояние зеркала. Коэффициент преломления воды $n = 4/3$. Принять, что глубина воды мала по сравнению с радиусом кривизны зеркала R .

4. Светящийся предмет находится в воде на расстоянии x от стенки аквариума, к которой снаружи приклеена плоско-выпуклая линза (в воздухе ее фокусное расстояние равно f). Линза и стенка сосуда очень тонкие. Коэффициент преломления воды равен $4/3$, а стекла $3/2$. Предмет находится на оптической оси линзы. Найдите положение изображения y и коэффициент увеличения в зависимости от положения предмета в воде. В частности, найдите положение изображения и увеличение для $x = f$. Что изменится, если линзу приклеить к внутренней стороне аквариума?

5. Доказать, что угол отклонения луча, прошедшего через призму, минимален (рис. 20) в том и только том случае, когда ход луча симметричен.

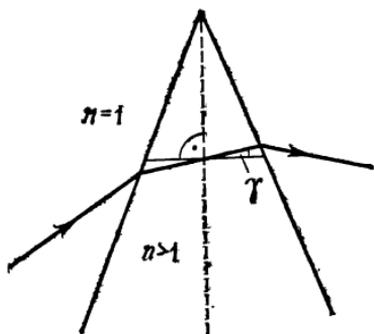


Рис. 20

Указание. В качестве независимой переменной удобно выбрать угол γ , показанный на рисунке.

6. Стеклянная трубка, имеющая внутренний радиус r и внешний R ($r < R$), заполнена люминесцирующей жидкостью, которая под действием рентгеновского излучения дает зеленое свечение. Коэффициент преломления стекла для зеленого света равен n_1 , а для жидкости n_2 . Какому условию должно удовлетворять соотношение r/R , чтобы при наблюдении трубки сбоку казалось, что толщина стенок трубки равна нулю?

7. В среде с коэффициентом преломления, равным 1, находится оптически однородный прозрачный шар с коэффициентом преломления $n > 1$. Радиус шара равен R . На шар падают два параллельных луча симметрично относительно его центра, отстоящие один от другого на $d < 2R$.

1. Какому условию должны удовлетворять d и n , чтобы лучи пересеклись внутри шара?
2. При каком условии лучи могут пересечься вне шара (если $d < 2R$)?
3. Какое соотношение должно выполняться, чтобы лучи при любом d не могли пересечься вне шара?

8. На прозрачную среду с коэффициентом преломления, зависящим от y , под малым углом к нормали

падает луч света в точке $y = 0$ (рис. 21). Каким должен быть вид функции $n(y)$, чтобы внутри рассматриваемой среды траектория луча представляла собой параболу?

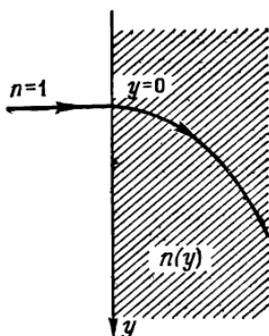


Рис. 21

9. Над обширной горизонтальной равниной распыляют с самолета инсектицид — прозрачную бесцветную жидкость, коэффициенты преломления которой на границах видимого спектра равны: $n_{кр} = 1,460$ (на красной) и $n_{ф} = 1,470$ (на фиолетовой). При этом над равниной наблюдается радуга, обусловленная каплями инсектицида. Определить угловой диаметр красной и фиолетовой дуги радуги. При какой высоте Солнца над горизонтом может вообще наблюдаться радуга? Солнце рассматривается как точечный, бесконечно удаленный от Земли источник света.

Указание. Доказать, что для разных длин волн предельный угол, под которым луч выходит из капли после однократного внутреннего отражения, различен. Доказать, что максимальная интенсивность света с данной длиной волны соответствует некоторому предельному углу, под которым луч выходит из капли.

Плоскость, транспортер, винт, шар, вал

1*. Однородный шар скатывается с наклонной плоскости с углом наклона α . Коэффициент трения покоя шара на плоскости равен f . Коэффициент трения качения равен 0. Определить предельный угол α , при котором шар может скатываться без проскальзывания.

2*. На наклонной плоскости на высоте h находится шарик. Начальная скорость шарика (линейная и угловая) равна 0. Коэффициент трения шарика о плоскость равен $f = 2/7$. Коэффициент трения качения между шариком и плоскостью равен 0. В начальный момент шарик отпускают. Как зависит от угла наклона плоскости α конечная линейная скорость шарика v (т. е. скорость центра шарика в момент, когда он достигает нижнего конца наклонной плоскости)? Построить график функции $v(\alpha)$.

3*. По горизонтальному столу движется клин массой M . На плоскость клина, образующую угол α с плоскостью стола, кладут шарик массой m . Шарик начинает катиться без трения и без проскальзывания. Коэффициент трения клина о стол равен 0. Определить ускорение, с которым движется клин.

4. На горизонтальную ленту равномерно движущегося со скоростью $v = 5$ м/с транспортера брошен с очень малой высоты кусочек мела таким образом, что одна из его граней горизонтальна. Оказалось, что мел начертил на ленте линию длиной $s = 5$ м. Несколько позже транспортер выключили, а лента замедленно двигалась до остановки с ускорением $a = -5$ м/с².

Прочертил ли мел снова линию на ленте? Если да, то какой длины? Можно ли точно рассчитать, каково должно быть ускорение ленты, чтобы мел не прочерчивал полосу?

5*. Два шара с одинаковыми массами M , радиусами R и одинаковыми свойствами поверхностей положили на горизонтальную плоскую ленту транспортера, движущуюся равномерно со скоростью v_0 . Один из шаров сплошной и изготовлен из материала с меньшей плотностью, чем второй, который имеет внутреннюю шаровую полость радиусом r . Определить движение обоих шаров с момента помещения их на транспортер (начальная скорость шаров равна 0). В расчет принимать только трение скольжения, трение качения без проскальзывания считать равным 0. Коэффициент трения скольжения шара о ленту транспортера равен f .

Как на основе поведения шаров определить, какой из них сплошной, а какой полый? Подтвердить вывод

расчетом. Момент инерции сплошного шара относительно оси, проходящей через его центр, равен $I = \frac{2}{5}MR^2$.

6*. На неподвижном вертикальном винте с шагом s находится гайка, имеющая момент инерции I и массу m . Коэффициент трения гайки о винт равен нулю. В начальный момент гайка движется вниз со скоростью v_0 . Как зависит от времени скорость вертикального поступательного движения гайки? Какое это движение? Ускорение свободного падения считать заданным.

7. На горизонтальных параллельных рельсах находится однородный вал с ниткой, на конце которой привязан груз. Сначала вал приторможен и система вал + груз не движется. Затем вал освобождают. Через некоторое время ось вала начинает двигаться с

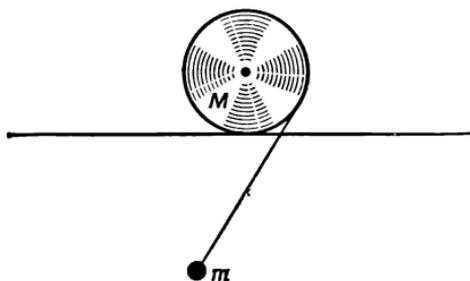


Рис. 22

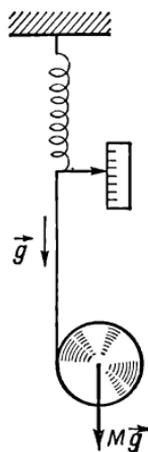


Рис. 23

постоянным ускорением a (рис. 22). Зная, что движение вала совершается без проскальзывания, определить:

- а) соотношение масс груза m и вала M ;
- б) минимальный коэффициент трения движущегося вала о рельсы (трением качения вала пренебречь).

8. На неподвижный вал радиусом r навита тонкая, гибкая, невесомая и нерастяжимая нить, на конце которой привязан маленький грузик. В начальный

момент нить навита до конца и грузик находится возле вала. В момент $t_0 = 0$ грузику придают начальную скорость v в направлении, перпендикулярном к оси вала. Нить сразу же начинает раскручиваться, поэтому считаем, что навитая часть нити не скользит по валу, а свободная ее часть все время лежит в плоскости, перпендикулярной оси вала. Как зависят от времени длина развившейся части нити?

Примечание. Предполагается, что на систему не действует сила тяжести.

9*. На катушку, имеющую форму однородного вала, навита тонкая, легкая и гибкая бумажная лента. Конец ленты прикреплен к зажиму пружинного динамометра. В начальный момент система выглядит так, как изображено на рис. 23. Затем лента начинает разматываться — катушка падает вниз. Что показывает динамометр в процессе падения катушки? Все время ли разматывавшаяся часть ленты направлена вертикально? Масса катушки равна M . Колебаниями пружины пренебрегаем.

10. С вершины полусферы радиусом $R = 1$ м, лежащей на горизонтальной подставке, съезжает небольшой грузик. Оторвется ли грузик от полусферы при движении? Если да, то на какой высоте от подставки? Трением грузика о поверхность полусферы пренебрегаем. Начальная скорость грузика равна 0.

11. В центре тонкого небольшого стержня длиной 20 см закреплена материальная точка. Стержень приклонен к гладкой вертикальной стене и, таким образом, находится в положении неустойчивого равновесия. Нижний конец стержня может двигаться по полу без трения. После небольшого отклонения стержень начинает двигаться, оставаясь все время в одной плоскости. Как только центр стержня достигает пола, он тотчас «приклеивается» к нему и остается неподвижным. На каком расстоянии от стены окажется центр стержня?

Равновесие и устойчивость

1. Человек массой 60 кг стоит на балке массой 30 кг, соединенной при помощи веревки с блоками, как показано на рис. 24. Длина балки равна l . Найти

силу, которую человек должен приложить к концу веревки, чтобы система находилась в равновесии. Трением в блоках пренебречь. Следует ограничиться случаем, когда балка горизонтальна, а веревки вертикальны.

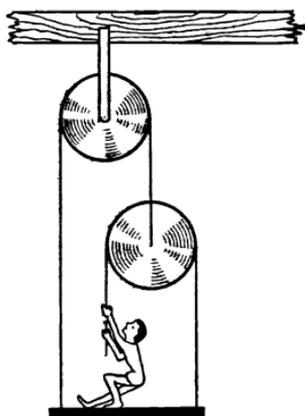


Рис. 24

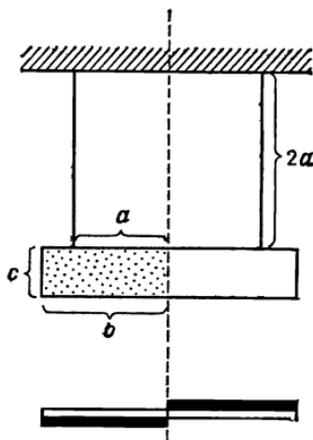


Рис. 25

2. Рамка из жесткой проволоки, имеющая форму квадрата со стороной a и массу m , висит неподвижно на нити, прикрепленной к середине одной из ее сторон. Через рамку течет ток I . Вся система находится в однородном вертикально направленном магнитном поле \vec{B} . Каково положение равновесия рамки?

3. На деревянном полу стоит лестница-стремянка. Посередине она связана веревкой, растяжением которой можно пренебречь. Веревка разрывается, если к ней приложить силу $F > 98$ Н.

Определить, при каком угле между половинками лестницы веревка оборвется, если известно, что на вершине лестницы стоит человек массой $m = 70$ кг, а коэффициент трения лестницы о пол равен $f = 0,65$.

Считаем, что силы приложены симметрично и массой лестницы можно пренебречь.

4. Плоская, тонкая, прямоугольная стеклянная пластина массой m подвешена на двух невесомых и нерастяжимых нитях так, как показано на рис. 25. С каждой стороны половина поверхности пластины

покрыта химически активным металлом. Пластины помещают в стеклянный сосуд (поначалу пустой), куда в некоторый момент впускают газообразный хлор под давлением p . Предположив, что вероятность химической реакции присоединения молекул хлора к металлу равна $P < 1$, определить угол, на который повернется пластина вокруг вертикальной оси в состоянии равновесия.

Принять, что масса присоединяемого хлора практически одинакова с обеих сторон пластины, что давление хлора по мере прохождения реакции падает пренебрежимо мало, а образовавшееся соединение хлора с металлом полностью остается на пластине. Предполагается также, что за время наблюдения прореагировало настолько мало хлора, что вероятность P и массу пластины m можно считать постоянными.

5. На рис. 26 показана система, состоящая из двух идеальных невесомых пружин, имеющих в нерастянутом состоянии длину l_0 и коэффициент упругости k , а

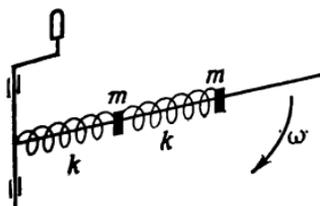


Рис. 26

также двух одинаковых грузиков с массами m , нанизанных на тонкий, гладкий невесомый стержень. Система может вращаться вокруг вертикальной оси, перпендикулярной к направлению стержня.

1. Какую минимальную работу требуется совершить, чтобы угловая скорость системы возросла от начальной величины $\omega_0 = 0$ до некоторого значения ω , при условии, что в начальном и конечном состояниях грузики неподвижны относительно стержня?

2. Может ли скорость ω иметь любое произвольное значение?

6. Сосуд в форме сферы радиусом $r = 9,81$ см, внутрь которого помещено небольшое тело, вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр

симметрии шара. При угловой скорости $\omega_1 = 5$ рад/с давление тела на стенку в состоянии равновесия равно $N_1 = 10^{-2}$ Н. При какой скорости ω_2 давление тела на стенку станет равным $N_2 = 4 \cdot 10^{-2}$ Н? Трение между телом и поверхностью сосуда пренебрежимо мало. Ускорение свободного падения $g = 9,81$ м/с².

7. Математический маятник длиной l может колебаться в вертикальной плоскости, которая вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через точку подвеса, с постоянной угловой скоростью ω . Определить положение равновесия маятника. Какого рода это равновесие (устойчивое, неустойчивое, безразличное)?

8. Шарик, привязанный на тонкой, гибкой, невесомой и нерастяжимой нити к концу неподвижного вертикального жесткого стержня, заставляют двигаться по окружности в горизонтальной плоскости. Нить очерчивает коническую поверхность с углом при вершине 2α . Сначала система находится в неподвижном лифте. В некоторый момент лифт начинает свободно падать.

Определить движение шарика до и во время падения лифта.

9. Три валика одинакового радиуса лежат на горизонтальном столе так, как показано на рис. 27. Коэффициент трения скольжения валиков о стол равен f ,

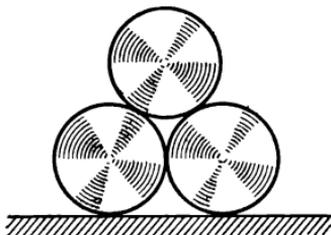


Рис. 27

а друг о друга — h . Трение качения отсутствует. Каким условиям должны удовлетворять f и h , чтобы система находилась в равновесии?

Примечание. Следует считать, что до укладки верхнего валика два других лежали вплотную друг к дру-

гу и что третий валик был сразу положен симметрично.

10. Тонкий однородный стержень массой M и длиной d находится на диске (рис. 28), вращающемся с постоянной угловой скоростью ω . Ось стержня лежит

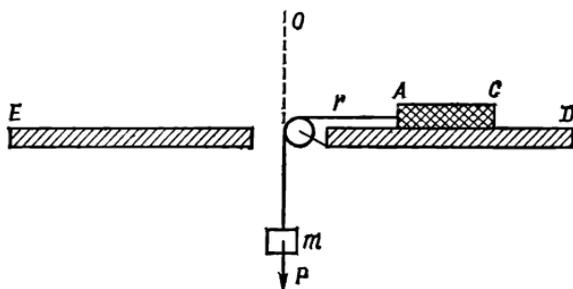


Рис. 28

на радиусе диска. К одному из концов стержня привязана нить с грузом массой m , висящим на оси вращения диска. Коэффициент трения между стержнем и диском равен f . Определить наименьшее и наибольшее расстояния одного из концов стержня от оси, при которых стержень еще не будет скользить вдоль радиуса диска.

11. Конусообразная воронка, угол при вершине которой равен $2\alpha = 120^\circ$, вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 2$ рад/с. Ось вращения направлена вертикально. В каком месте на внутренней стороне воронки должен находиться небольшой грузик, чтобы он был в равновесии? Какого рода будет это равновесие?

Рассмотреть два случая: а) трением можно пренебречь; б) трением пренебрегать нельзя.

12. В электромагнитном поле, создаваемом находящимися в одной и той же точке точечным зарядом $e > 0$ и полюсом длинного тонкого магнита, движется по круговой орбите точечный заряд $-e$, имеющий массу m . Диаметр круговой орбиты перпендикулярен оси магнита и виден из точки, где находятся заряд и полюс, создающие поле, под углом 2θ . Приняв, что магнитный полюс создает поле $\vec{B} = \alpha \vec{r}/r^3$, где $\alpha > 0$

есть некоторая постоянная, определить радиус орбиты.

13. В отверстие в стальной плите пропущен стальной винт с гайкой (рис. 29). Диаметр головки винта и гайки D намного больше диаметра винта d . Гайка затянута так, что сила давления головки винта на плиту

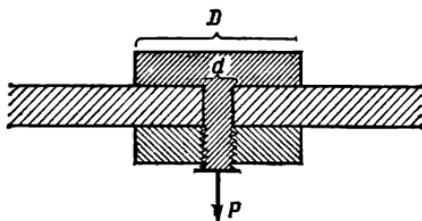


Рис. 29

ту равна N_0 . Представить на графике зависимость силы N , с которой головка винта давит на поверхность плиты, от силы P , приложенной к концу винта.

14. Два точечных заряда с большой массой, каждый из которых равен $+e$, находятся в пространстве

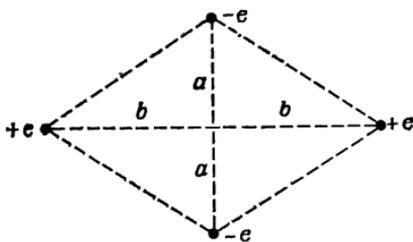


Рис. 30



Рис. 31

на расстоянии $2b$ друг от друга. В плоскости, перпендикулярной к прямой, соединяющей эти заряды, и находящейся на одинаковом расстоянии от них, движутся по круговой траектории радиуса a две материальные точки, каждая из которых имеет массу m и заряд $-e$. При этом центр круговой траектории лежит на прямой, соединяющей неподвижные заряды. Материальные точки движутся таким образом, что всегда находятся на противоположных концах диаметра круга (рис. 30).

1. Каким должно быть соотношение между величинами a и b , чтобы система находилась в состоянии равновесия при $\omega = 0$?

2. С какой угловой скоростью должны двигаться отрицательные заряды, чтобы система находилась в состоянии динамического равновесия?

15. К водопроводному крану с помощью резиновой трубки прикреплена стеклянная трубка длиной 1 м и сечением $0,3 \text{ см}^2$, загнутая на конце под прямым углом (рис. 31). Определить угол, на который отклонится трубка от вертикали, если скорость истечения воды равна 2 м/с, а масса трубки составляет 80 г.

Упругостью резиновой трубки можно пренебречь.

16. Отрицательные заряды величиной $-q$ и положительные заряды величиной Q расположены в однородном изотропном диэлектрике так, что отрицательные заряды занимают все вершины правильного куба, а положительные — центры его граней. Может ли эта система находиться в состоянии устойчивого, неустойчивого или безразличного равновесия ($q \neq 0, Q \neq 0$)?

17. К углам однородной прямоугольной рамки со сторонами a и b прикреплены концы нити. Какой должна быть длина нити l , чтобы эту рамку можно было повесить на гвоздь, вбитый в вертикальную стену, таким образом, как показано на рис. 32.



Рис. 32

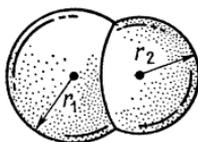


Рис. 33

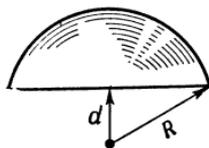


Рис. 34

Примечание. Рамка должна находиться в положении устойчивого равновесия. Трением пренебречь.

18. Два мыльных пузыря расположены таким образом, что часть пленки у них общая (рис. 33).

1. Зная радиусы r_1 и r_2 , найти радиус кривизны r_{12} пленки, разделяющей пузыри.

2. Предположим, что $r_1 = r_2 = r$. Какой радиус имели пузыри, прежде чем они слились? Какой радиус будет иметь пузырь, образующийся после того, как лопнет пленка, отделяющая два первоначальных пузыря?

Избыточное внутреннее давление в пузыре зависит только от поверхностного натяжения мыльной пленки и радиуса пузыря. Кроме того, предполагается, что избыточное давление внутри пузырей намного меньше, чем давление воздуха вне пузырей, в связи с чем сумму объемов газов в пузырях можно считать неизменной.

Примечание. Объем газа в части шара, характеризующейся параметрами d и R (рис. 34), составляет

$$\frac{1}{3} \pi (2R^3 - 3R^2d + d^3).$$

19. По поверхности мыльного пузыря радиусом R равномерно распределен заряд q . Поверхностное натяжение мыльной пленки равно σ .

1. На какую величину Δp давление в пузыре превышает давление окружающего воздуха?

2. Определить вид равновесия пузыря, висящего на открытой соломинке, т. е. при $\Delta p = 0$.

Силой тяжести пренебречь.

Примечание. Считается, что величина σ не зависит от заряда q .

20. Экспериментально установлены следующие факты:

1) угловой диаметр Солнца, наблюдаемый с Земли, составляет $\alpha = 32'$;

2) солнечная постоянная, т. е. количество лучистой энергии, падающей каждую секунду на 1 см^2 поверхности, перпендикулярной к прямой, соединяющей Землю и Солнце на расстоянии, равном расстоянию между Землей и Солнцем, составляет

$$S = 0,135 \text{ лм} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1};$$

3) постоянная Стефана — Больцмана равна

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-12} \text{ лм} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{К}^{-4};$$

4) солнечное излучение практически соответствует излучению абсолютно черного тела.

Пользуясь вышеуказанными данными, определить:
а) температуру Земли, считая, что эта температура постоянна во времени и что Земля является абсолютно черным телом и идеальным проводником тепла (последнее предположение позволяет считать, что температура всех точек поверхности Земли одинакова);

б) температуру верхних слоев Солнца.

Примечание. Полная энергия, излучаемая за 1 с с 1 см² поверхности абсолютно черного тела, определяется законом Стефана — Больцмана и составляет σT^4 , где σ — постоянная Стефана — Больцмана, а T — абсолютная температура тела.

Электромагнитные явления

1. Трубка из латунного листа, имеющая наружный радиус $R - d$, вставлена в другую латунную трубку с внутренним радиусом $R = 10$ см. Промежуток между трубками толщиной $d = 1,5$ мм заполнен трансформаторным маслом с диэлектрической постоянной $\epsilon = 5$. Трубки расположены так, что их общая ось лежит в горизонтальной плоскости и перпендикулярна к плоскости магнитного меридиана. Внутри меньшей трубки помещена магнитная стрелка, которая может свободно вращаться в горизонтальной плоскости. Образованный трубками конденсатор заряжают от электрофорной машины до напряжения 30 кВ, и наружная трубка начинает вращаться с постоянной частотой $f = 50$ с⁻¹.

На какой угол отклонится стрелка от плоскости магнитного меридиана? Предложите удобный метод измерения угла ее отклонения. Горизонтальная составляющая напряженности магнитного поля Земли равна $B_z = 2 \cdot 10^{-5}$ Тл (теслы). Произведение магнитной проницаемости и диэлектрической постоянной вакуума $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$, где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме. Принять, что латунь не влияет на величину горизонтальной составляющей магнитного поля внутри трубок, длина трубок много больше радиуса R , т. е. можно воспользоваться моделью бесконечно длинного соленоида. Для цилиндрического конденсатора в этой задаче с хорошим приближением можно ис-

пользовать формулу, определяющую емкость плоского конденсатора.

Исторический комментарий. Опыт, подобный описанному, был проведен во второй половине XIX в. Роуландом. Он ставил целью доказать, что механическое перемещение электростатически заряженных тел порождает те же магнитные эффекты, что и электрический ток от батареи, т. е. что электрический ток представляет собой движение зарядов по проводнику (в то время это была всего лишь гипотеза).

2. Сферический тонкостенный сосуд наполняется ртутью из резервуара (рис. 35), оканчивающегося

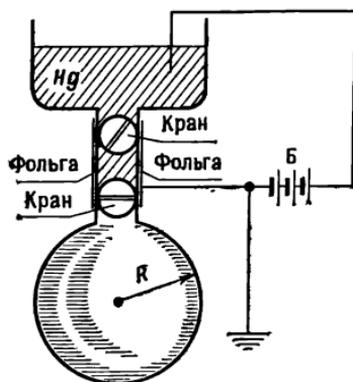


Рис. 35

стеклянной трубкой с двумя кранами. Внутренний диаметр трубки равен $a = 21$ мм, а толщина стенки $d = 1$ мм. Часть трубки между кранами обернута металлической фольгой, соединенной с заземленным выводом батареи. Второй вывод батареи опущен в сосуд с ртутью.

Нижний сосуд наполняют порциями, закрывая нижний кран и открывая верхний. Наполнив трубку ртутью, верхний кран закрывают и снимают с трубки фольгу. Затем через нижний кран выпускают ртуть в сосуд. Эту процедуру повторяют, пока сферический сосуд не заполнится ртутью.

Какая приблизительно разность потенциалов возникает между сферическим сосудом и землей, если э. д. с. батареи равна $\mathcal{E} = 120$ В, радиус сферического сосуда $R = 10$ см, а диэлектрическая постоянная стекла $\epsilon = 6$.

3. Между обкладками плоского конденсатора размерами $2a \times a \times 2d$ ($d \ll a$) помещены две пластины диэлектрика с диэлектрическими постоянными ϵ_1 и ϵ_2 размерами $a \times a \times d$ каждая, а также одна пластина диэлектрика размерами $2a \times a \times d$ с диэлектрической

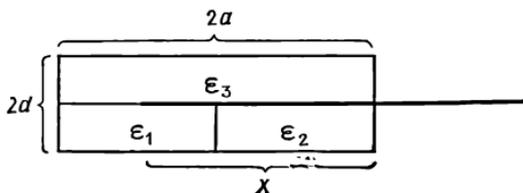


Рис. 36

постоянной ϵ_3 (рис. 36). Между пластинами диэлектриков помещена очень тонкая длинная изолированная лента проводника шириной a . Определить емкость этой системы в зависимости от величины параметра x . Определить силу F , втягивающую ленту в конденсатор или выталкивающую ее, если к обкладкам подключен источник постоянной э. д. с. U . Построить график функции $F(x)$. Определить максимальную величину силы F , приняв $\epsilon_1 = 10$, $\epsilon_2 = 2$, $\epsilon_3 = 1$, $a/d = 100$, $U = 30\,000$ В. Какой вид будет иметь функция $F(x)$, если после зарядки до напряжения U конденсатор отключить от батареи и только после этого поместить в него ленту проводника?

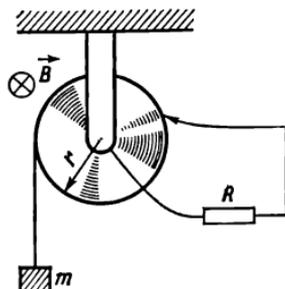


Рис. 37

4. На медном блоке радиусом r , закрепленном так, как показано на рис. 37, навита длинная нить, на конце которой подвешен груз массой m . Блок находится в однородном магнитном поле B , силовые линии которого перпендикулярны к блоку. К оси блока подклю-

чен резистор R , второй вывод которого соединен с периферией блока с помощью щетки, скользящей по его краю. Под действием груза блок начинает вращаться. Определить предельную конечную скорость блока. Трением пренебречь. Изменится ли результат, если резистор будет двигаться вместе с блоком?

Указание. Для упрощения представьте, что блок сделан в виде велосипедного колеса. Подумайте, почему так можно поступить.

5. Две произвольные точки A и B кольца, сделанного из тонкой однородной проволоки, соединены с источником постоянного тока, как показано на рис. 38. Определить напряженность магнитного поля в центре кольца, создаваемого токами, текущими по кольцу.

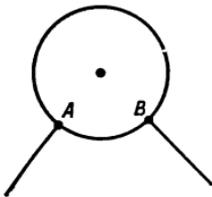


Рис. 38

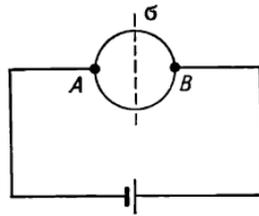


Рис. 39

Считать, что провода, подводящие ток, расположены радиально и поэтому не влияют на величину напряженности магнитного поля в центре кольца.

6. Изолированный телеграфный провод (сопротивление на единицу длины постоянно), заключенный в заземленный металлический экран, соединяет два пункта A и B , находящиеся на расстоянии l друг от друга. Провод поврежден в неизвестном пункте C , вследствие чего происходит короткое замыкание провода с экраном. Как найти место повреждения C , имея в распоряжении аккумуляторную батарею и миллиамперметр? Сопротивление оболочки на единицу длины постоянно.

7. Часть электрической цепи AB , обведенная на рис. 39 кружком, содержит систему резисторов, для которой плоскость σ является плоскостью симметрии: каждому резистору соответствует симметрично распо-

ложенный резистор той же величины по другую сторону плоскости. Доказать, что все точки цепи, лежащие на плоскости σ , имеют одинаковый потенциал.

8. Кольцо из тонкой однородной металлической проволоки с сопротивлением единицы длины ρ равномерно вращается относительно своего центра с угловым ускорением ϵ .

Определить величину магнитной индукции B в центре кольца. Заряд электрона равен e , а масса — m .

Примечание. Возникновение магнитного поля внутри замкнутого металлического кольца, вращающегося с угловым ускорением, впервые было подтверждено экспериментально Стюартом и Толмэном в 1917 г. Вместо кольца Стюарт и Толмэн использовали кольцевую катушку с большим числом витков и измеряли возникающий в ней ток.

9. В однородное электрическое поле \vec{E} помещен однородный металлический шар радиусом R . Поверхностную плотность σ индуцированного на шаре заряда можно представить как функцию угла α (рис. 40). Определить зависимость $\sigma(\alpha)$.

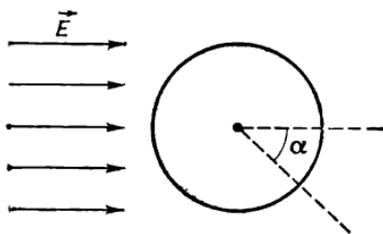


Рис. 40

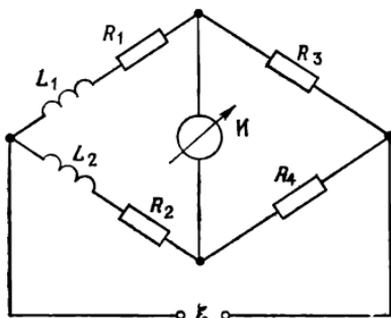


Рис. 41

Примечание. Представьте себе два взаимно проникающих, но немного не совпадающих сплошных одинаковых шара, равномерно заряженных по объему — один положительно, а другой отрицательно. Каково электрическое поле в общем объеме шаров, где величина зарядов обоих шаров одинакова? Что произойдет, если расстояние между центрами шаров будет уменьшаться до 0?

10. Рассмотрим схему, показанную на рис. 41. Величины $R_1, R_2, R_3, R_4, L_1, L_2$ подобраны так, что независимо от того, постоянна ли э. д. с. \mathcal{E} или меняется со временем, через измерительный прибор I ток не проходит. Определить R_1 и L_1 , если $R_2 = 90$ Ом, $R_3 = 300$ Ом, $R_4 = 60$ Ом, $L_2 = 900$ Гн.

Разное

1. Тонкий, однородный, гибкий, но нерастяжимый трос длиной l и массой M вначале был подвешен за оба конца на близко расположенных друг от друга крюках (рис. 42, а). В какой-то момент один конец

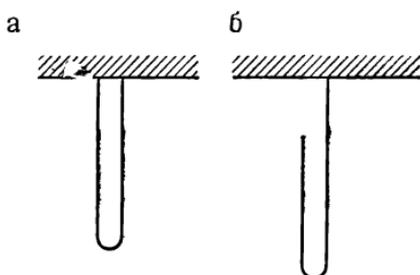


Рис. 42

троса освободился и начал падать (рис. 42, б). Известно, что наибольшая нагрузка, которую выдерживает каждый из крюков, равна N и превышает вес троса, равный Mg . При каком соотношении величин Mg и N верхний конец троса не вырвет крюк?

Предполагается, что при падении каждый элемент троса, достигая своего конечного положения, останавливается и остается неподвижным.

2*. На абсолютно гладкой горизонтальной плоскости лежит куб, опираясь на плоскость одним из ребер. Угол между гранью куба и горизонтальной плоскостью составляет 45° . Такое положение куба явно неустойчиво, и от самого слабого толчка куб переверачивается. Найти угловую скорость куба в момент, когда его боковая грань ударяется о горизонтальную плоскость. Ребро куба равно a , масса — m .

3*. На краю диска радиусом $R = 9$ см, вращающегося без трения, сидят $n = 10$ майских жуков,

каждый массой $m = 5$ г. Диск вращается с угловой скоростью $\omega_1 = 30$ об/мин. В некоторый момент времени жуки одновременно и с одинаковыми скоростями начинают ползти к центру диска. Какую работу W совершил каждый из жуков, если известно, что после их остановки скорость вращения диска оказалась равной $\omega_2 = 45$ об/мин? Момент инерции диска равен $I = 405$ г·см².

4*. Определить момент инерции однородной правильной призмы (имеющей в основании равносторонний треугольник со стороной a) относительно оси, проходящей через центры оснований. Масса призмы равна m .

Указание. При решении следует воспользоваться теоремой Штейнера.

5*. Из тонкой однородной пластины вырезана симметричная звездочка (рис. 43). Момент инерции звездочки относительно оси c равен I . Определить момент

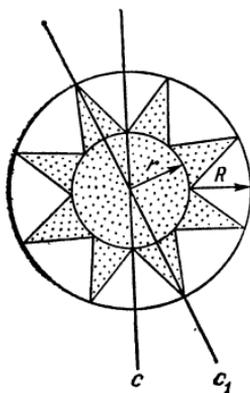


Рис. 43

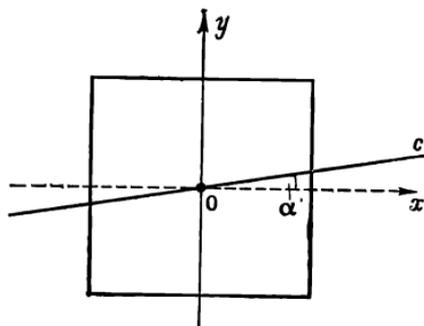


Рис. 44

инерции звездочки относительно оси c_1 . Оси c и c_1 лежат в плоскости рисунка, r и R считать известными.

Указание. Рассчитайте момент инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости звездочки.

6*. а. Определить момент инерции тонкой однородной квадратной пластины со стороной a и массой M относительно оси c (рис. 44), проходящей через центр

квадрата O и составляющей угол α с осью x . Ось c лежит в плоскости пластины.

б. Утверждается: «Если моменты инерции тела относительно некоторых трех взаимно перпендикулярных осей, проходящих через точку O этого тела, одинаковы, то момент инерции этого тела относительно любой оси, проходящей через точку O , всегда равен одной и той же величине». Докажите либо опровергните это утверждение.

7. Наблюдатель, стоящий на Земле, видит неслышно приближающийся к нему самолет. Самолет минует наблюдателя и удаляется. Наблюдатель начинает слышать звук самолета в момент, когда направление, в котором виден самолет, составляет угол φ с горизонтом. Самолет летит прямолинейно и горизонтально. Объяснить это явление, а также определить скорость самолета в случае, когда $\varphi = 30^\circ$. Скорость звука равна 340 м/с.

8. Скорость звука в газе можно представить формулой, в которую входят только давление газа p , плотность газа ρ и некоторая безразмерная постоянная.

На основании этой информации определить соотношение скоростей распространения звука в одном и том же разреженном газе в двух различных состояниях, характеризующихся величинами давления и плотности p_1, p_2 и ρ_1, ρ_2 соответственно.

9. Железная дорога проходит между двумя большими скалами с параллельными отвесными стенами, находящимися на некотором расстоянии друг от друга. На некотором участке дорога перпендикулярна к стенам скал. Равномерно двигаясь по этому участку со скоростью v , локомотив свистит с частотой f . Скорость звука равна V . Сколько (и какие) частот имеет эхо, доносящееся до машиниста?

10. Согласно модели атома Бора, момент импульса частицы относительно неподвижного центра в поле центральной силы притяжения может принимать только значения, кратные \hbar ($\hbar = h/2\pi$), где h — постоянная Планка). Определить допустимые значения энергии частицы массой m , обращающейся вокруг центра

притяжения по круговой орбите. Сила притяжения частицы к центру равна

$$\vec{F} = -kr, \vec{r}$$

где $k > 0$ — некоторый размерный коэффициент, а \vec{r} — радиус-вектор частицы.

Рассматриваемая система называется трехмерным гармоническим осциллятором. Выразить разрешенные значения величины энергии через частоту этого осциллятора ω ($\omega = 2\pi/T$, где T — период).

11. На рис. 45 показана оптическая система, состоящая из зеркала Z и трех поляризаторов Π_1 , Π_2 и Π_3 . Поляризаторы Π_1 и Π_3 установлены так, что их плоскости поляризации взаимно перпендикулярны.

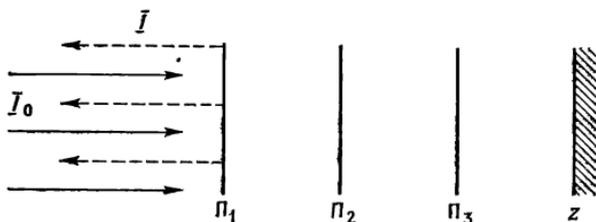


Рис. 45

На систему направляют пучок неполяризованного света интенсивностью I_0 .

1. Определить наибольшую возможную интенсивность I пучка света, отраженного от системы. Какой ориентации плоскости поляризации поляризатора Π_2 соответствует это значение?

2. Можно ли увеличить отношение I/I_0 (и до какого предела), установив вместо поляризатора Π_2 систему из произвольного числа поляризаторов?

Считать, что поляризаторы идеальны, т. е. не отражают свет, и что свет, поляризованный в плоскости пропускания, полностью проходит через поляризатор, а свет, поляризованный в перпендикулярной плоскости, полностью поглощается.

12. Два идеальных поляризатора Π_1 и Π_2 установлены один за другим, как показано на рис. 46. Плоскость поляризации поляризатора Π_1 составляет с пло-

скостью рисунка угол α , а плоскость поляризации поляризатора Π_2 — угол β (оба угла отсчитываются в одну сторону).

На описанную систему падает пучок света интенсивностью I_0 , поляризованного в плоскости рисунка. Определить интенсивность пучка после прохождения

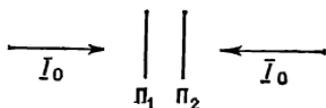


Рис. 46

через систему для двух случаев: свет падает слева и свет падает справа. Какова будет интенсивность выходящего пучка, если падающий свет неполяризован?

13. К числу наиболее интересных космических объектов относятся так называемые «черные дыры», возникающие на последней стадии эволюции некоторых типов звезд. Есть убедительные свидетельства того, что «черные дыры» действительно существуют, а не являются только гипотезой. Звезда определенного типа может превратиться в «черную дыру», когда она сжимается до радиуса, при котором энергия света, излученного с ее поверхности, оказывается недостаточной, чтобы преодолеть гравитационное притяжение звезды и выйти в пространство. Для описания «черной дыры» необходимо привлечь сложный математический аппарат общей теории относительности Эйнштейна. Однако некоторые задачи можно решить с точностью до порядка величины, пользуясь лишь общими законами сохранения. Фотону с частотой ν приписывается «масса» $h\nu/c^2$, где h — постоянная Планка, а c — скорость света.

Представим себе звезду в виде однородного шара массой M . Определить предельный радиус R , при котором эта звезда станет «черной дырой». Определить численное значение R для Солнца, при котором оно в ходе эволюции могло бы стать «черной дырой». Необходимые числовые данные найдите в справочниках.

РЕШЕНИЯ

Предлагаемые ниже решения задач по форме несколько отличаются от того, что обычно требуется от участников физических олимпиад. Одной из целей этой книги является популяризация физики. Именно поэтому в решениях задач вычисления занимают минимальное место, а основное внимание уделено разбору физической сущности задач, что и должно быть наиболее интересным для читателя. При подготовке решений мы отчасти пользовались ранее опубликованными материалами, однако все решения были проверены заново. Там, где это представлялось целесообразным, в решения были внесены некоторые изменения и дополнения.

Электрические цепи

1. Рассмотрим схему, показанную на рис. 47. Отметим, что по соображениям симметрии точки контура, обозначенные одинаковыми строчными буквами, должны иметь одинаковый потенциал. Поэтому можно считать, что разъединение, показанное на рисунке, не изменяет токов, текущих через резисторы. Следовательно, схема на рис. 47 эквивалентна схеме, приведенной в тексте задачи. Вычисления легко произвести в уме: $R_{AB} = 2r$. Искомое сопротивление можно определить, используя и другие эквивалентные схемы, которых существует множество. Две из них показаны на рис. 48. При составлении схем используется тот факт, что соединение точек, имеющих одинаковые потенциалы, не изменяет силу токов, проходящих через отдельные резисторы.

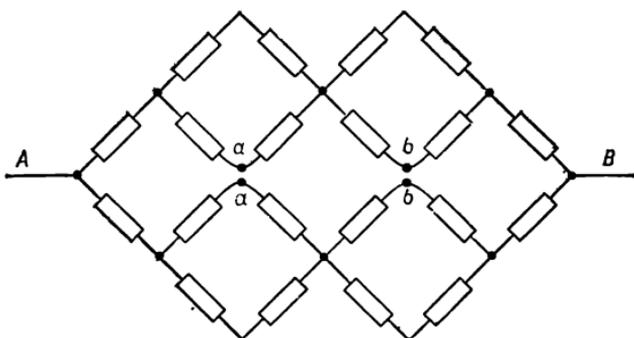


Рис. 47

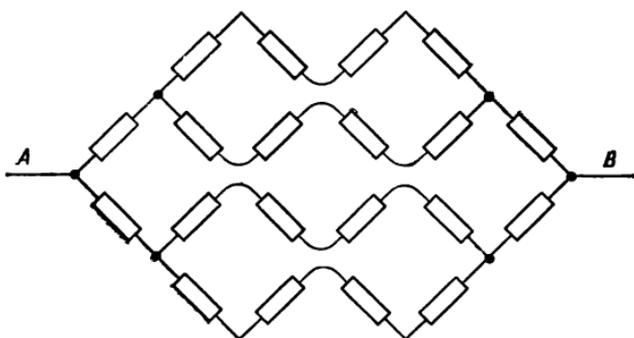
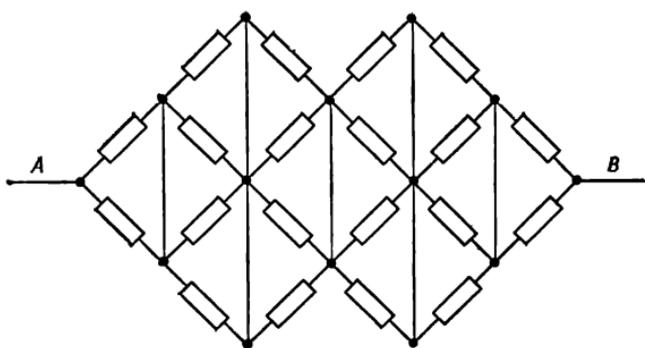


Рис. 48

2. Для простоты будем считать, что полный ток, проходящий через точку A , равен $i = 1$. Согласно первому закону Кирхгофа, распределение токов в контуре

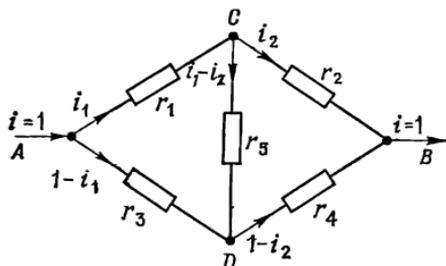


Рис. 49

можно представить так, как показано на рис. 49. Из второго закона Кирхгофа для участка $ACDA$ имеем

$$i_1 r_1 + (i_1 - i_2) r_5 + (i_1 - 1) r_3 = 0.$$

В то же время для участка $CBDC$

$$i_2 r_2 + (i_2 - 1) r_4 + (i_2 - i_1) r_5 = 0.$$

Таким образом, мы получаем систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$i_1 (r_1 + r_3 + r_5) + i_2 (-r_5) = r_3,$$

$$i_1 (-r_5) + i_2 (r_2 + r_4 + r_5) = r_4.$$

Эту систему можно решить двумя способами. Воспользуемся методом детерминантов (определителей). Детерминант системы

$$W = \begin{vmatrix} r_1 + r_3 + r_5, & -r_5 \\ -r_5, & r_2 + r_4 + r_5 \end{vmatrix} = (r_1 + r_3)(r_2 + r_4) + \\ + r_5(r_1 + r_2 + r_3 + r_4).$$

Следовательно,

$$i_1 = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} r_3, & -r_5 \\ r_4, & r_2 + r_4 + r_5 \end{vmatrix} = \frac{1}{W} [r_3(r_2 + r_4 + r_5) + r_4 r_5],$$

$$i_2 = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} r_1 + r_3 + r_5, & r_3 \\ -r_5, & r_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{W} [r_4(r_1 + r_3 + r_5) + r_3 r_5].$$

Из определения эквивалентного сопротивления

$$iR_{AB} = i_1 r_1 + i_2 r_2,$$

но $i = 1$, значит,

$$R_{AB} = i_1 r_1 + i_2 r_2.$$

Подставляя вместо i_1 и i_2 полученные выражения, находим

$$R_{AB} = \frac{r_1 r_3 (r_2 + r_4) + r_2 r_4 (r_1 + r_3) + r_5 (r_1 + r_2) (r_3 + r_4)}{(r_1 + r_3) (r_2 + r_4) + r_5 (r_1 + r_2 + r_3 + r_4)}.$$

Приведенную в задаче систему резисторов в общем случае не удастся представить в виде комбинации последовательно-параллельных соединений. В этом можно убедиться, рассмотрев все возможные последовательно-параллельные соединения данных 5 резисторов и определив соответствующие эквивалентные сопротивления. В каждом случае получается иной результат. Схема, изображенная на рис. 49, является простейшей схемой такого рода.

При решении данной задачи мы предполагали, что ток, входящий в узел A , равен 1. Очевидно, что это предположение не влияет на конечный результат и делается лишь для удобства вычислений.

3. Если бы мы имели только один электрод, с которого стекает ток i , и приложили бы его к точке A , то по соображениям симметрии ток распределялся бы на сети резисторов так, что к точке B подходил бы ток, равный $i/4$ (рис. 50, *a*). Аналогичная картина

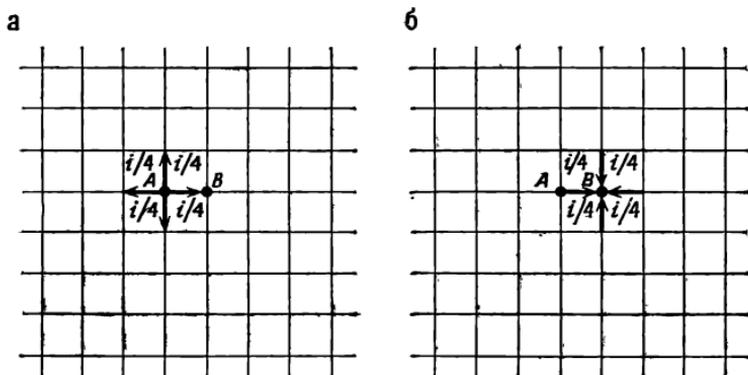


Рис. 50

должна наблюдаться и для электрода, «собирающего» ток i и приложенного к точке B . Через ветвь AB к точке B будет подходить ток $i/4$ (рис. 50, *б*). Распределение токов для двух электродов является суммой распределений токов от отдельных электродов; следо-

вательно, при подключении рассматриваемой сети к источнику в точках A и B через ветвь AB будет протекать ток $i/4 + i/4 = i/2$. Значит, напряжение между точками A и B будет равно $U_{AB} = ri/2$, а эквивалентное сопротивление $R_{AB} = U_{AB}/i = r/2$.

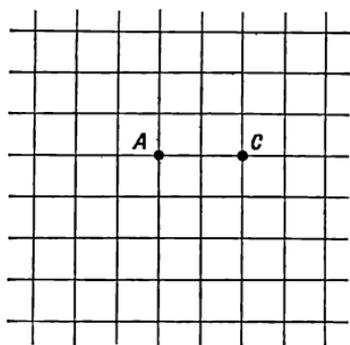


Рис. 51

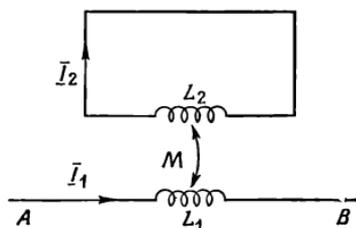


Рис. 52

Заметим, что решение намного бы усложнилось, если бы точки A и B не были ближайшими узлами сети. Например, определить эквивалентное сопротивление для точек A и C (рис. 51) гораздо труднее.

4. Для верхнего контура схемы, изображенной на рис. 52, имеем

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} \pm M \frac{dI_1}{dt} = 0.$$

Разность потенциалов U_{AB} равна

$$U_{AB} = L_1 \frac{dI_1}{dt} \pm M \frac{dI_2}{dt}.$$

В обеих формулах знак (+) или (-) выбирается в зависимости от направления намотки катушек согласно правилу Ленца. Из этих равенств получаем

$$U_{AB} = L_1 \frac{dI_1}{dt} \pm M (\mp M) \frac{1}{L_2} \frac{dI_1}{dt} = \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) \frac{dI_1}{dt}.$$

Следовательно, независимо от направления намотки катушек эквивалентная индуктивность данной системы равна

$$L_{AB} = L_1 - \frac{M^2}{L_2}.$$

Индуктивность L — всегда положительная величина. В противном случае энергия катушки с током, равная $1/2LI^2$, должна была бы уменьшаться с увеличением тока I . Поэтому

$$L_1 - \frac{M^2}{L_2} \geq 0,$$

но тогда

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2}.$$

Как видно, коэффициент взаимной индукции не может превышать среднего геометрического индуктивностей обеих катушек.

Заметим, что приведенное вычисление L_{AB} не зависит от того, каким образом ток изменяется со временем, т. е. оно применимо как для синусоидальных токов, так и для несинусоидальных.

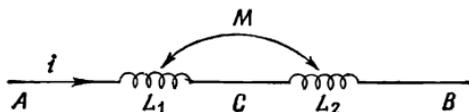


Рис. 53

5. Рассмотрим первый случай, когда катушки расположены последовательно (рис. 53). Для этой схемы справедливо соотношение

$$U_{AB} = U_{AC} + U_{CB},$$

но

$$U_{AC} = L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt},$$

$$U_{CB} = L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt}.$$

Следовательно,

$$U_{AB} = (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt}.$$

С другой стороны, согласно определению эквивалентной индуктивности L_{AB} должно выполняться равенство

$$U_{AB} = L_{AB} \frac{di}{dt}.$$

Сравнивая два последних равенства, находим

$$L_{AB} = L_1 + L_2 + 2M.$$

Если бы катушка индуктивностью L_1 была навита в противоположную сторону, то, согласно правилу Лен-

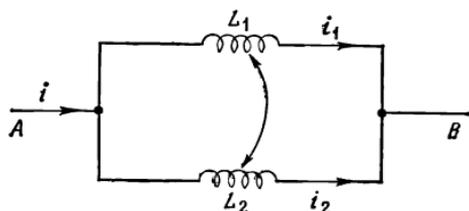


Рис. 54

ца, в выражениях для U_{AC} и U_{CB} перед M стоял бы знак минус, и тогда мы имели бы

$$L_{AB} = L_1 + L_2 - 2M.$$

Теперь рассмотрим случай, когда катушки расположены параллельно, как показано на рис. 54. Можем записать следующие равенства:

$$i = i_1 + i_2 \quad (1)$$

$$U_{AB} = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \quad (\text{верхняя ветвь}) \quad (2)$$

$$U_{AB} = L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \quad (\text{нижняя ветвь}) \quad (3)$$

Используя равенство (1), уравнения (2) и (3) можно представить в виде

$$U_{AB} = L_1 \frac{di}{dt} - (L_1 + M) \frac{di_2}{dt},$$

$$U_{AB} = (L_2 + M) \frac{di_2}{dt} - M \frac{di}{dt}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{L_1 + M} U_{AB} = \frac{L_1}{L_1 + M} \frac{di}{dt} - \frac{di_2}{dt},$$

$$\frac{1}{L_2 + M} U_{AB} = \frac{di_2}{dt} - \frac{M}{L_2 + M} \frac{di}{dt}.$$

Сложив эти уравнения и выделив коэффициенты при U_{AB} , находим

$$U_{AB} = \frac{\frac{L_1}{L_1 + M} - \frac{M}{L_2 + M}}{\frac{1}{L_1 + M} + \frac{1}{L_2 + M}} \frac{di}{dt} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M} \frac{di}{dt}.$$

Пользуясь определением индуктивности L_{AB} , получаем следующий конечный результат:

$$L_{AB} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}.$$

Изменению направления катушки индуктивности L_1 соответствует, согласно правилу Ленца, изменение знака при M в уравнениях (2) и (3). В этом случае

$$L_{AB} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}.$$

6. Стандартный способ, основанный на решении системы уравнений, вытекающих из законов Ома и Кирхгофа, был бы в данном случае слишком громоздким. Попробуем решить задачу, пользуясь симметричностью системы. Обратим внимание, что при повороте на 120° вокруг оси AB система занимает положение, не отличное от первоначального.

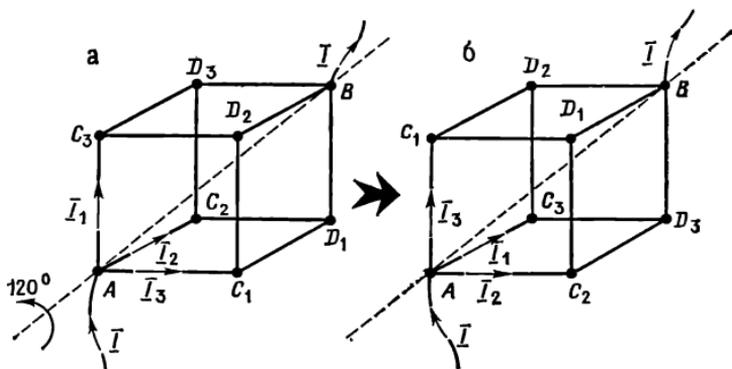


Рис. 55

Пусть токи, выходящие из вершины A , равны I_1, I_2, I_3 (рис. 55, а). При повороте на 120° вокруг оси AB ток I_1 переходит в I_3, I_2 в I_1, I_3 в I_2 (рис. 56, б). Поэтому

$$I_1 = I_2, \quad I_2 = I_3, \quad I_3 = I_1.$$

Все три значения силы тока равны, следовательно,

$$I_1 = I_2 = I_3 = I/3.$$

Равенство токов одновременно означает и равенство потенциалов в точках C_1, C_2 и C_3 . Аналогично можно доказать равенство потенциалов в точках D_1, D_2 и D_3 .

Точки с одинаковыми потенциалами можно соединить друг с другом, не внося изменений в распределение токов и напряжений в цепи. Соединив между собой

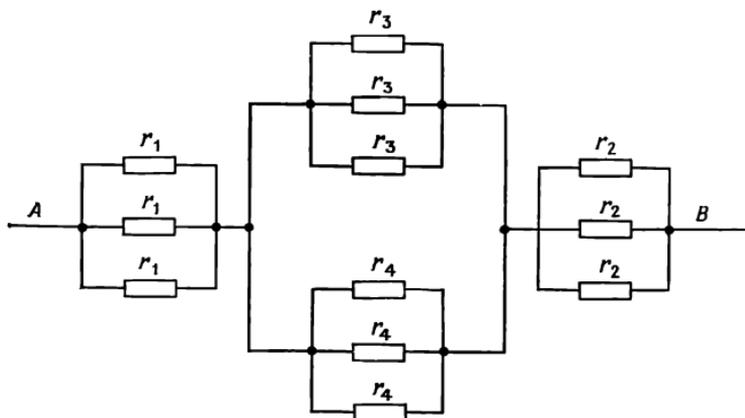


Рис. 56

точки C_1, C_2, C_3 и D_1, D_2, D_3 , мы получим схему, показанную на рис. 56, которая эквивалентна исходной. Полное сопротивление цепи теперь легко определить, пользуясь тем, что она представляет собой комбинацию

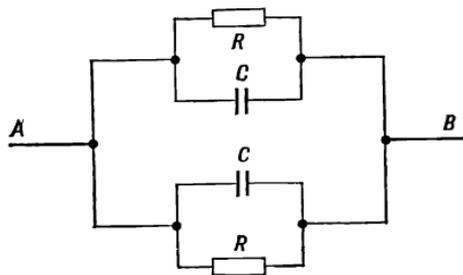


Рис. 57

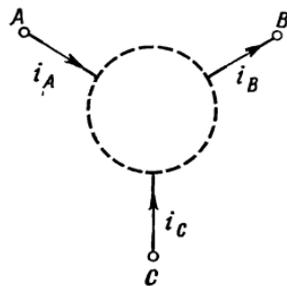


Рис. 58

параллельно и последовательно соединенных резисторов:

$$R_{AB} = \frac{r_1}{3} + \left(\frac{3}{r_3} + \frac{3}{r_4} \right)^{-1} + \frac{r_2}{3} = \frac{1}{3} \left(r_1 + r_2 + \frac{r_3 r_4}{r_3 + r_4} \right).$$

В заключение следует отметить, что если бы в контуре кроме омических сопротивлений содержались бы также катушки индуктивности или конденсаторы, то ситуация значительно усложнилась бы. Система уравнений для токов уже не была бы чисто алгебраиче-

ской, так как токи зависели бы от времени и от начальных условий: начального заряда на конденсаторах и начальных токов в катушках. В общем случае даже в симметричной системе, например такой, что показана на рис. 57, токи могут быть распределены и несимметрично, если в начальный момент заряды на конденсаторах были неодинаковы.

7. «Черный ящик» с двумя выводами вполне характеризуется зависимостью между одним напряжением и одной силой тока, а значит, и одним эквивалентным сопротивлением. Система с тремя выводами (рис. 58) характеризуется зависимостью между двумя напряжениями, например U_{AB} и U_{BC} (U_{AC} однозначно определяется по этим двум напряжениям), и

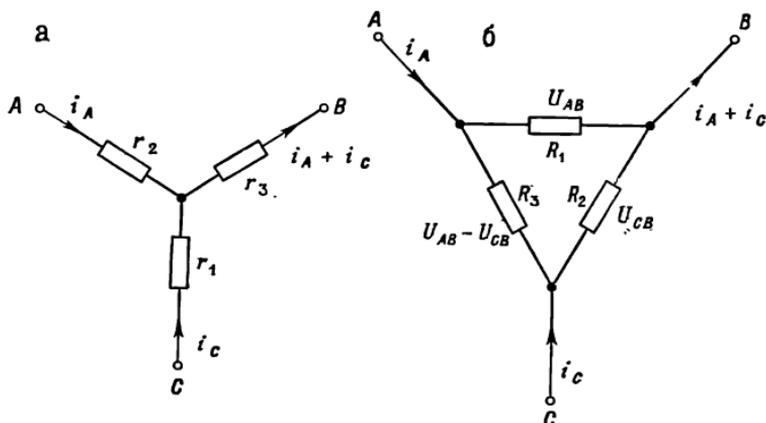


Рис. 59

двумя токами, например i_A и i_C ($i_B = i_A + i_C$). Установим вид этой зависимости для обеих схем, приведенных в условии задачи, а затем исследуем условия их эквивалентности.

1. Для «звезды» (рис. 59, а) имеем

$$U_{AB} = i_A r_2 + (i_A + i_C) r_3 = i_A (r_2 + r_3) + i_C r_3,$$

$$U_{CB} = i_C r_1 + (i_A + i_C) r_3 = i_A r_3 + i_C (r_1 + r_3).$$

2. Для «треугольника» (рис. 59, б) имеем

$$i_A = \frac{U_{AB}}{R_1} + \frac{U_{AB} - U_{CB}}{R_3} = U_{AB} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) - U_{CB} \frac{1}{R_3}, \quad (a)$$

$$i_C = \frac{U_{CB}}{R_2} - \frac{U_{AB} - U_{CB}}{R_3} = -U_{AB} \frac{1}{R_3} + U_{CB} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right).$$

Решая систему уравнений относительно токов для «звезды», получаем

$$\begin{aligned}
 i_A &= U_{AB} \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 r_3 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right)} - \\
 &\quad - U_{CB} \frac{r_3}{r_1 r_2 r_3 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right)}, \\
 i_C &= -U_{AB} \frac{r_3}{r_1 r_2 r_3 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right)} + \\
 &\quad + U_{CB} \frac{r_2 + r_3}{r_1 r_2 r_3 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right)}. \tag{6}
 \end{aligned}$$

Требование неотличимости соединений «треугольником» и «звездой» равнозначно требованию, чтобы две последние системы уравнений [(а) и (б)] были идентичны. Это означает, что соответствующие коэффициенты должны быть равны

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} &= \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 r_3 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right)}, \\
 \frac{1}{R_3} &= \frac{r_3}{r_1 r_2 r_3 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right)}, \\
 \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} &= \frac{r_2 + r_3}{r_1 r_2 r_3 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right)}.
 \end{aligned}$$

Эти связи устанавливают искомые необходимые и достаточные условия. Их можно записать в виде

$$r_i = \frac{1}{R_i} \cdot \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{в}$$

К этому же выводу можно прийти быстрее, рассматривая частные случаи, например прикладывая напряжение к соответствующим двум концам обеих схем, оставляя третий вывод свободным и используя затем принцип суперпозиции для электрических полей и токов. Возможность замены «треугольника» «звездой» и обратно можно использовать при определении полного сопротивления более сложных схем.

Например, сопротивление схемы, показанной на рис. 2, можно определить, пользуясь эквивалентной схемой, приведенной на рис. 60. Величины сопротивлений внутри пунктирной окружности определяются установленными выше соотношениями (в).

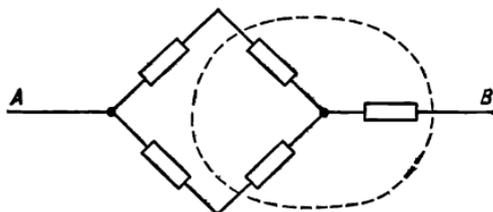


Рис. 60

8. Поскольку $d \ll a$, электрическое поле внутри конденсатора — кроме необходимого пространства у краев и вблизи границы раздела трех диэлектриков — является однородным. Поверхности, отделяющие диэлектрики ϵ_1 от ϵ_3 и ϵ_2 от ϵ_3 , эквипотенциальны, хотя их потенциалы и не обязательно равны друг другу.

Учитывая сказанное, рассматриваемый конденсатор можно представить в виде четырех конденсаторов, соединенных, как показано на рис. 61. Каждый из

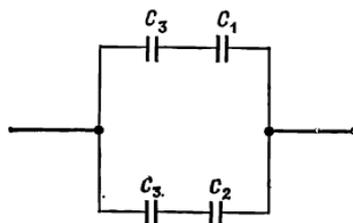


Рис. 61

конденсаторов имеет размеры $a \times a/2 \times d/2$. Конденсатор C_1 заполнен диэлектриком с диэлектрической постоянной ϵ_1 , C_2 — диэлектриком с диэлектрической постоянной ϵ_2 , а C_3 — диэлектриком с диэлектрической постоянной ϵ_3 . Тогда имеем

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 a^2}{d}, \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_2 a^2}{d}, \quad C_3 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_3 a^2}{d}.$$

Искомая емкость C равна

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}} + \frac{1}{\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} = \frac{\epsilon_0 a^2}{d} \left(\frac{\epsilon_1 \epsilon_3}{\epsilon_1 + \epsilon_3} + \frac{\epsilon_2 \epsilon_3}{\epsilon_2 + \epsilon_3} \right).$$

Из полученного выражения видно, что описанную в тексте задачи пластину, сложенную из трех различных диэлектриков, можно заменить пластиной однородного диэлектрика с диэлектрической постоянной

$$\epsilon = \epsilon_3 \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_3} + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_3} \right),$$

не изменяя при этом емкости конденсатора.

Если бы поверхность, отделяющая диэлектрик с диэлектрической постоянной ϵ_3 от остальных диэлектриков, была проводящей, например была бы покрыта слоем металла, то замена одного конденсатора четырьмя, показанная на рис. 61, была бы неправомерна, поскольку при этом не учитывается, что правые обкладки конденсаторов C_3 имеют в таком случае одинаковый потенциал. Нетрудно понять, что в этом случае первоначальный конденсатор следует представить

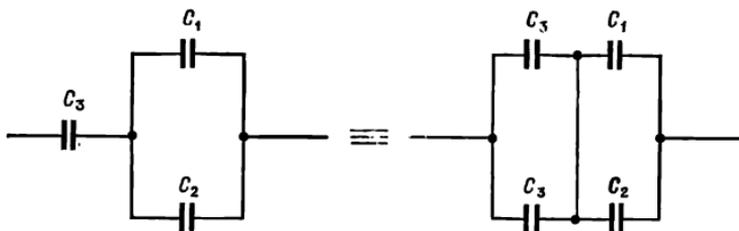


Рис. 62

в виде комбинации трех конденсаторов, как показано на рис. 62, где $C'_3 = 2C_3$. Тогда эквивалентная емкость будет равна

$$C' = \frac{1}{\frac{1}{2C_3} + \frac{1}{C_1 + C_2}} = \frac{\epsilon_0 a^2}{d} \frac{2\epsilon_3 (\epsilon_1 + \epsilon_2)}{\epsilon_1 + \epsilon_2 + 2\epsilon_3},$$

т. е. она оказывается иной, чем в предыдущем случае.

9. Прежде всего установим, какая максимальная мощность выделяется на внешнем сопротивлении $R_{\text{внеш}}$, подключенном к источнику с внутренним сопротивлением R и э. д. с. \mathcal{E} . Рассмотрим участок цепи на рис. 63. Ток в этой цепи равен

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_{\text{внеш}}},$$

напряжение на резисторе $R_{\text{внеш}}$ равно

$$U_{\text{внеш}} = IR_{\text{внеш}}.$$

Тогда мощность $P_{\text{внеш}}$, выделившаяся на резисторе $R_{\text{внеш}}$, равна

$$P_{\text{внеш}} = U_{\text{внеш}}I = I^2R_{\text{внеш}}.$$

После подстановки в это выражение I и несложного преобразования получаем

$$P_{\text{внеш}} = \frac{\mathcal{E}^2}{4R} \left(\frac{\sqrt{RR_{\text{внеш}}}}{(R + R_{\text{внеш}})/2} \right)^2.$$

Выражение в скобках является отношением среднего геометрического внутреннего сопротивления источника R и сопротивления цепи $R_{\text{внеш}}$ к среднему

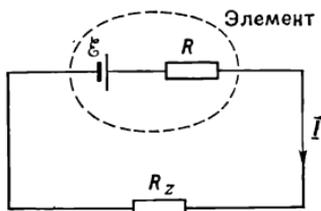


Рис. 63

арифметическому этих величин. Наибольшая величина этого отношения соответствует равенству $R = R_{\text{внеш}}$ и равна 1. Максимальная мощность P_{max} , которую можно получить от данного источника, равна

$$P_{\text{max}} = \frac{\mathcal{E}^2}{4R}.$$

Такая мощность потребляется в том случае, когда сопротивление нагрузки равно внутреннему сопротивлению источника.

Двигатель потребляет мощность P . Значит, батарея питания должна содержать не меньше

$$n_0 = \frac{P}{P_{\text{max}}} = \frac{4PR}{\mathcal{E}^2}$$

элементов. Иначе говоря, количество элементов n должно удовлетворять условию

$$n \geq n_0.$$

В нашем случае

$$n = \frac{4 \cdot 150 \cdot 0,45}{(1,5)^2} = 120,$$

следовательно

$$n \geq 120.$$

Минимальное необходимое количество элементов не может быть меньше n_0 . Это, однако, не значит, что n должно быть равно n_0 . (Например, n_0 могло бы оказаться дробным числом, а количество элементов, естественно, может быть только целым.)

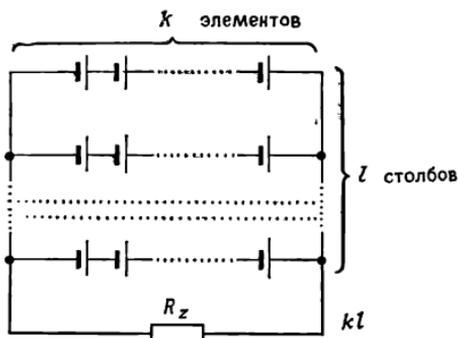


Рис. 64

Определим теперь сопротивление двигателя $R_{дв}$. Это сопротивление не следует путать с омическим сопротивлением обмоток двигателя. Величина эффективного сопротивления двигателя не является постоянной, но зависит от активной нагрузки P . В нашем случае это просто сопротивление резистора, эквивалентного сопротивлению двигателя, рабочие характеристики которого приведены в условии задачи. Имеем

$$P = \frac{U^2}{R_{дв}}.$$

Тогда

$$R_{дв} = \frac{U^2}{P}.$$

Подставив числовые данные, получим $R_{дв} = 1,5$ Ом.

Интуиция подсказывает наиболее простое соединение источников — «прямоугольником» (рис. 64). Пока, конечно, трудно судить, соответствует ли правильное решение именно такому соединению. Попробуем, од-

нако, из соединений подобного вида выбрать такое, при котором мощность, выделившаяся на сопротивлении $R_{дв}$, будет равна P , а падение напряжения на $R_{дв}$ равно U .

Прежде всего рассмотрим предельный случай, когда $n = n_0 = 120$ элементов. Если бы нам не удалось найти соответствующего соединения, то следовало бы взять другое n и пробовать снова.

При $n = n_0$ каждый из элементов должен работать, вырабатывая наибольшую возможную мощность. Если вся батарея будет отдавать максимальную мощность, то внутреннее сопротивление батареи R_6 должно равняться сопротивлению двигателя $R_{дв}$. Но $R_6 = (k/l)R$, причем $kl = 120$. Кроме того,

$$\frac{k}{l}R = \frac{U^2}{P},$$

$$kl = 120.$$

Подставив числовые значения R , U и P , получим систему уравнений для k и l , которая имеет следующие решения:

$$l = 6, \quad k = 20.$$

Нетрудно проверить, что при соответствующем этому решению соединении элементов «прямоугольником» мощность, выделенная на двигателе, действительно равна P , а напряжение на клеммах двигателя равно U .

Из того факта, что 120 элементов можно соединить способом, удовлетворяющим условию задачи, следует, что наименьшее количество элементов, необходимых для работы двигателя в заданном режиме, меньше или равно 120. Но ранее было показано, что $n \geq 120$. Поэтому $n_{\min} = 120$. Таким образом, в батарею следует соединить 120 элементов, причем батарея должна состоять из 6 столбов по 20 элементов в каждом.

Заметим, что соединение «прямоугольником» в рассмотренном случае является наиболее выгодным в том смысле, что каждый элемент отдает на внешнюю нагрузку максимальную мощность.

10. Исследуем все возможные соединения резистора R с двумя одинаковыми резисторами r и определим эквивалентное сопротивление этих систем. Для

большей части возможных соединений, показанных на рис. 65, все вычисления можно без труда выполнить в уме. Эквивалентные сопротивления обозначим через

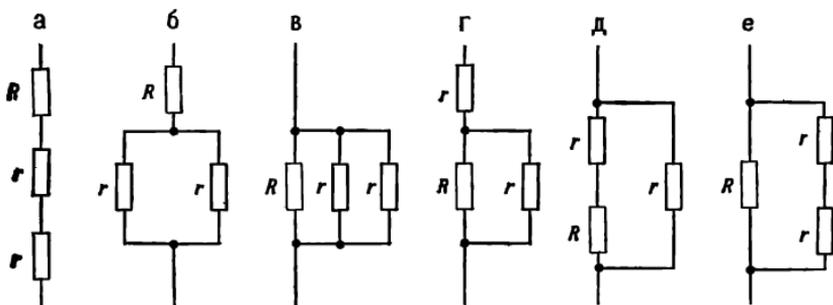


Рис. 65

R_a, R_b, \dots , соответственно обозначениям на рисунке. Получаем

$$R_a = R + 2r, \quad R_r = \frac{r^2 + 2Rr}{R + r},$$

$$R_b = R + \frac{r}{2}, \quad R_d = \frac{r(R + r)}{R + 2r},$$

$$R_b = \frac{Rr}{r + 2R}, \quad R_e = \frac{2Rr}{2r + R}.$$

Теперь в соответствии с условиями задачи приравняем к R каждое из найденных эквивалентных сопротивлений:

$$\text{а) } R + 2r = R, \quad \text{б) } R + \frac{r}{2} = R,$$

$$\text{в) } \frac{Rr}{r + 2R} = R, \quad \text{или } r = r + 2R.$$

При $r > 0$ и $R > 0$ эти три уравнения не имеют решения.

$$\text{г) } \frac{r^2 + 2Rr}{R + r} = R, \quad \text{или } R^2 - Rr - r^2 = 0,$$

$$\text{тогда } R = \frac{r}{2} (1 \pm \sqrt{5}).$$

$$\text{д) } \frac{r(R + r)}{R + 2r} = R, \quad \text{или } R^2 + Rr - r^2 = 0,$$

$$\text{тогда } R = \frac{r}{2} (-1 \pm \sqrt{5}).$$

В случаях (г) и (д), даже отбрасывая лишние физические смысла отрицательные значения корня, получаем, что зависимость между R и r выражается иррациональным числом. Это, однако, невозможно, поскольку сопротивление R является эквивалентным сопротивлением схемы, составленной из одинаковых резисторов r . Величина этого сопротивления определяется либо по закону Ома, либо по закону Кирхгофа,

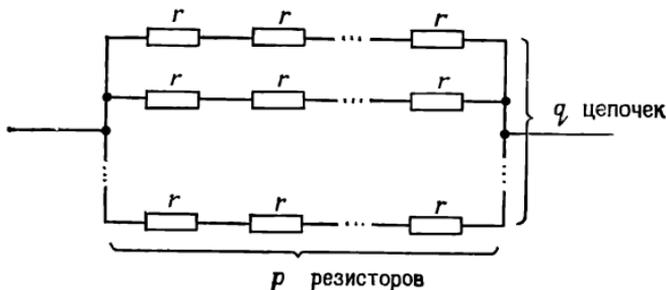


Рис. 66

при этом используются только арифметические действия (сложение, вычитание, деление, умножение), которые не могут в результате привести к иррациональной связи между r и R :

$$е) \quad \frac{2Rr}{2r + R} = R, \quad \text{или} \quad R^2 = 0.$$

Это уравнение, подобно первым трем, имеет решение, противоречащее условию задачи. Как видим, ни в одном из шести рассмотренных случаев невозможно выполнить требования задачи. Других способов соединения не существует.

Задачи типа рассмотренной выше относятся к чисто «академическим», абстрактным. На практике все физические величины, в том числе и электрическое сопротивление, измеряются с некоторой, большей или меньшей, погрешностью.

Иррациональное число можно с некоторым достаточным приближением представить рациональным числом. Наилучшим примером этого служат десятичные дроби. Для каждого заданного иррационального числа можно подобрать десятичную дробь, отличающуюся от него на сколь угодно малую величину (последняя определяется выбором последнего десятичного знака после запятой).

Для каждого рационального $p/q > 0$ можно построить схему, состоящую из одинаковых резисторов r и имеющую общее сопротивление, равное $(p/q)r$. Пример такой схемы приведен на рис. 66. Если считать, что сопротивление можно измерить с малой, но не бесконечно малой погрешностью ϵ , то, имея в распоряжении только одинаковые резисторы r , можно построить схему, общее сопротивление которой с точностью до ϵ будет равно $\frac{1}{2}r(1 + \sqrt{5})$.

Рассмотренная задача, несмотря на свой академический характер, полезна и потому, что она обращает внимание на основные свойства операций, которые производятся при вычислении эквивалентных сопротивлений.

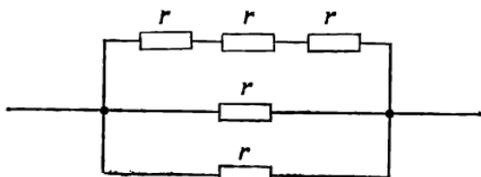


Рис. 67

11. Все возможные соединения резисторов r , r и R такие же, как и в предыдущей задаче. Из условия задачи для последовательных соединений получаем следующие уравнения:

$$\text{а) } R + 2r = \frac{1}{7}R, \quad \text{г) } r + \frac{Rr}{r+R} = \frac{R}{7},$$

$$\text{б) } R + \frac{r}{2} = \frac{1}{7}R, \quad \text{д) } \frac{1}{r+R} + \frac{1}{r} = \frac{7}{R},$$

$$\text{в) } \frac{1}{R} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{7}{R}, \quad \text{е) } \frac{1}{R} + \frac{1}{2r} = \frac{7}{R}.$$

Тогда для R получаем следующие решения:

$$\text{а) } R = -\frac{7}{3}r, \quad \text{г) } R = \frac{13 \pm \sqrt{197}}{2}r,$$

$$\text{б) } R = -\frac{7}{12}r, \quad \text{д) } R = \frac{5 \pm \sqrt{53}}{2}r,$$

$$\text{в) } R = 12r, \quad \text{е) } R = 3r.$$

Решения (а) и (б) отбрасываем, так как R не может быть меньше 0. Отбрасываем и решение (в), поскольку

ку R не может превышать $3r$. Отбрасываем также решения (г) и (д), ибо R должно быть соизмеримо с r . Остается вариант (е). Соответствующую ему схему легко осуществить (рис. 67).

12. Определим ток, проходящий через резистор R в схемах, показанных на рис. 68, а и 68, б. Пользуясь

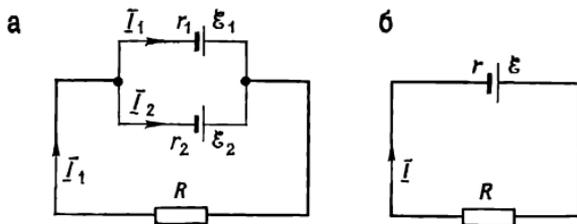


Рис. 68

законами Ома и Кирхгофа для контура (а), запишем следующие три уравнения:

$$\mathcal{E}_1 = I_1 r_1 + IR,$$

$$\mathcal{E}_2 = I_2 r_2 + IR,$$

$$I = I_1 + I_2.$$

Из первых двух уравнений определяем I_1 и I_2 и, подставляя полученные значения в третье уравнение, получаем

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - IR}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2 - IR}{r_2},$$

откуда

$$I = \frac{\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2}}{1 + \frac{R}{r_1} + \frac{R}{r_2}}.$$

Для контура (б) имеем

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$

Согласно условию задачи, оба выражения для I должны быть одинаковы, независимо от величины R . Значит, можно записать следующее тождество:

$$\frac{\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2}}{1 + R \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)} \equiv \frac{\mathcal{E}}{R + r},$$

или

$$R \cdot \left(\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} \right) + r \left(\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} \right) = R\mathcal{E} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \mathcal{E}.$$

В обеих частях имеем многочлены первой степени относительно R . Как известно, два многочлена тождественно равны в том и только том случае, когда коэффициенты при одинаковых степенях равны между собой. Следовательно,

$$\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} = \mathcal{E} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right),$$

$$r \left(\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} \right) = \mathcal{E}.$$

Тогда

$$\mathcal{E} = \frac{\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}},$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}.$$

Таким образом, два элемента, соединенных параллельно, всегда можно заменить одним элементом, э. д. с. и внутреннее сопротивление которого определяется приведенными выше выражениями. Заметим, что эти формулы несколько сложнее, чем для источников, соединенных последовательно. Если э. д. с. источников одинаковы ($\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$) и одинаковы их внутренние сопротивления ($r_1 = r_2$), то нахождение \mathcal{E} и r существенно упрощается:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1,$$

$$r = r_1/2.$$

Систему из n источников с э. д. с. $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$, имеющих внутренние сопротивления r_1, r_2, \dots, r_n и соединенных параллельно, можно заменить одним источником с э. д. с. \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r :

$$\mathcal{E} = \frac{\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} + \dots + \frac{\mathcal{E}_n}{r_n}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n}},$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n}.$$

Это можно доказать, например, методом математической индукции. Предлагаем сделать это самим читателям.

13. а. Сразу же после замыкания ключа K катушка не будет пропускать ток, конденсатор же будет вести себя как нулевое сопротивление. В связи с этим ток проходит через левый резистор R и конденсатор C . Эффективное сопротивление участка AB будет равно R . Через достаточно долгое время после замыкания ключа конденсатор перестает пропускать ток, а катушка начнет пропускать ток; сопротивление ее будет равно нулю. Теперь ток проходит через катушку L и правый резистор R . Эффективное сопротивление участка AB будет равно R .

б. Эту часть задачи можно решить разными методами, некоторые из них изучаются в школе, другие выходят за рамки школьной программы. Приведем один, хотя и не единственный, способ решения, основанный на школьной программе.

На основании первого закона Кирхгофа распределение токов в контуре можем представить так, как показано на рис. 69.

Согласно второму закону Кирхгофа, имеем

$$1) \quad \mathcal{E} = RI_1 + R(I - I_2) \quad \text{для участка } ARDRBEA,$$

$$2) \quad RI_1 = L \frac{d}{dt} (I - I_1) \quad \text{напряжение на катушке должно быть равно напряжению на левом резисторе } R,$$

$$3) \quad \frac{Q}{C} = R(I - I_2) \quad \text{напряжение на конденсаторе должно быть равно напряжению на левом резисторе } R.$$

Q — заряд, накопленный конденсатором. Кроме приведенных трех уравнений можно записать уравнение, выражающее зависимость между Q и I_2 :

$$4) \quad I_2 = \frac{dQ}{dt}.$$

Уравнение (2) можно представить в виде

$$I_1 = \frac{L}{R} \frac{d}{dt} (I - I_1).$$

Продифференцировав обе части уравнения (3) и воспользовавшись уравнением (4), получаем

$$I_2 = RC \frac{d}{dt} (I - I_2).$$

Вычтем второе из вновь полученных уравнений из первого и, учитывая, что $RC = L/R$, получим

$$(I_1 - I_2) = -RC \frac{d}{dt} (I_1 - I_2).$$

Последнее уравнение описывает зависимость $I_1 - I_2$ от времени. Дальнейшие преобразования этого уравнения выходят за рамки школьной программы, но и на

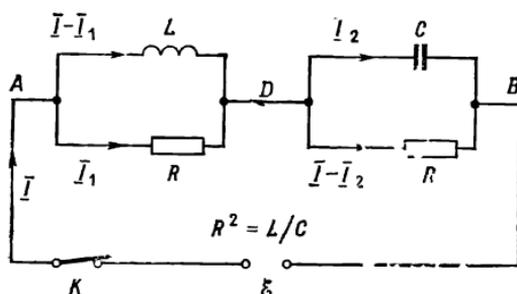


Рис. 69

основании его можно сделать некоторые выводы. Отметим, что уравнение не содержит э. д. с. \mathcal{E} . Следовательно, независимо от того, как изменяется со временем величина \mathcal{E} , разность токов $I_1 - I_2$ изменяется со временем в соответствии с выведенным уравнением. Очевидно, что решением этого уравнения является $I_1 - I_2 = 0$. А поскольку в начальный момент при замыкании ключа $I_1 = I_2$, то и во все последующие моменты времени

$$I_1 \equiv I_2.$$

Подставив это соотношение в уравнение (1), получим

$$\mathcal{E} \equiv RI.$$

Очевидно, что часть контура между точками A и B ведет себя как омическое сопротивление R .

Задачу можно решить, применив для цепи переменного тока с $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cdot \cos \omega t$ понятие импеданса. Этот способ заключается в следующем.

Катушке с индуктивностью L соответствует импеданс $L\omega i$, конденсатору с емкостью C — импеданс $1/C\omega i$, а резистору R — импеданс R . i — мнимая единица ($i^2 = -1$), ω — частота тока, $\omega = 2\pi/T$ (T — период колебания). Полученное выше соотношение для токов распространяется и на токи, изменяющиеся по гармоническому закону. Импеданс схемы (вообще говоря, это величина комплексная) определяется в соответствии с теми же правилами, что и эквивалентное сопротивление. Например, импеданс резистора R и катушки L , соединенных последовательно, равен $R + L\omega i$. Абсолютная величина импеданса называется полным сопротивлением. Для катушки L и резистора R полное сопротивление равно $\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$. Аргумент комплексного числа, каковым является импеданс, определяет сдвиг фаз между током и напряжением. Полное сопротивление контура будет действительной величиной в том и только том случае, когда для данной величины ω контура ведет себя как омическое сопротивление (т. е. не изменяет фазы).

Простой расчет показывает, что для рассматриваемого в данной задаче контура импеданс участка AB является действительной величиной, равной R , и не зависит от величины ω . Так как любую э. д. с., изменяющуюся со временем, можно представить в виде конечного или бесконечного числа налагающихся э. д. с., изменяющихся по гармоническому закону с различными (но постоянными во времени) частотами ω , то в нашем случае это означает, что часть контура между точками A и B ведет себя как омическое сопротивление, численно равное R , независимо от характера изменения \mathcal{E} со временем.

Данная задача интересна также тем, что указывает на возможность составления системы омических сопротивлений при использовании реактивных элементов, к которым относятся катушки и конденсаторы (изменяющие фазу).

Следует обратить внимание на то, что полные сопротивления, или импедансы, нельзя вычислять по тем же правилам, что и обычные омические сопротивления.

С рассмотренной задачей связана еще одна интересная проблема: оказывается, невозможно сконструировать такую систему, которая для любой ча-

стоты ω не давала бы сдвига фаз между током и напряжением и полное сопротивление которой было бы функцией от ω , не равной тождественно постоянной величине. Доказательство этого положения достаточно сложно.

14. Обратим внимание, что рассматриваемая цепь состоит из резистора X и последовательности блоков, состоящих из трех резисторов R , изображенных на рис. 70. Если последовательное подключение блоков

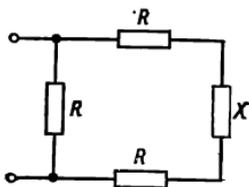


Рис. 70

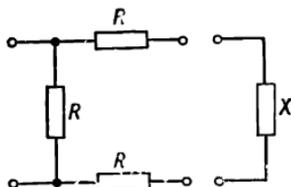


Рис. 71

не изменяет полного эквивалентного сопротивления цепи, то это означает, что эквивалентное сопротивление схемы на рис. 71 должно быть равно X . Значит,

$$\frac{1}{X} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R + X}.$$

Отсюда

$$X^2 + 2RX - 2R^2 = 0.$$

Решая это уравнение относительно X , находим

$$X_1 = (-1 + \sqrt{3})R,$$

$$X_2 = (-1 - \sqrt{3})R.$$

Решение X_2 отбрасываем, поскольку сопротивление не может иметь отрицательное значение. Таким образом, искомая величина X равна $(\sqrt{3} - 1)R$.

15. Докажем сначала, что данную систему пружин можно заменить одной пружинкой с коэффициентом упругости $k_{эф}$. Для этого рассмотрим отдельно два случая: пружинки расположены последовательно, одна за другой, и пружинки расположены параллельно.

а. Последовательное расположение (рис. 72).

Каждая из пружинок растягивается одной и той же силой F . Удлинение системы Δx равно сумме удлинений Δx_1 и Δx_2 . Отсюда получаем

$$F = k_1 \Delta x_1,$$

$$F = k_2 \Delta x_2,$$

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = F \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) = \frac{F}{k}.$$

Тогда эффективный коэффициент упругости k двух пружинок с коэффициентами упругости k_1 и k_2 , распо-

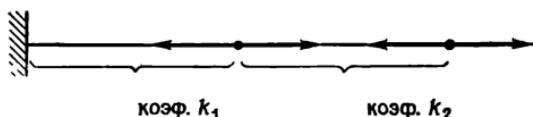


Рис. 72

ложенных последовательно, определяется соотношением

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}.$$

б. Параллельное расположение (рис. 73).

В этом случае удлинение системы Δx одинаково, а полная сила F , растягивающая систему, является сум-

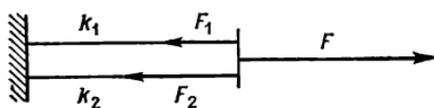


Рис. 73

мой сил F_1 и F_2 , растягивающих соответствующие пружинки. Тогда

$$F_1 = k_1 \Delta x, \quad F_2 = k_2 \Delta x,$$

$$F = F_1 + F_2 = (k_1 + k_2) \Delta x = k \Delta x.$$

Значит, эффективный коэффициент упругости системы теперь определяется соотношением

$$k = k_1 + k_2.$$

Пользуясь установленной зависимостью, определим $k_{эф}$:

$$\frac{1}{k_{эф}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2 + k_3},$$

$$k_{эф} = \frac{k_1(k_2 + k_3)}{k_1 + k_2 + k_3}.$$

Таким образом, задача сводится к рассмотрению колебаний грузика массой m , подвешенного на пружинке с коэффициентом упругости $k_{эф}$. В состоянии равновесия вес грузика уравновешивается натяжением пружинки. Теперь представим, что грузик отклонился от положения равновесия на x . Натяжение пружинки изменилось при этом на $k_{эф}x$. Возвращающая сила, действующая на грузик, равна тогда $F = -k_{эф}x$. Знак «минус» указывает, что эта сила направлена к положению равновесия. F пропорциональна x . Вследствие этого грузик будет совершать гармонические колебания. Ускорение грузика равно

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{k_{эф}}{m}x,$$

но при гармонических колебаниях

$$a = -\omega^2x,$$

где $\omega = 2\pi/T$ (T — период колебаний). Таким образом, искомый период колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_{эф}}}.$$

Соударения

1. На шарики действует сила электрического отталкивания. Эта сила тормозит шарик 1 и ускоряет шарик 2. В результате скорость шарика 1 уменьшается, а скорость шарика 2 возрастает. Расстояние между шариками уменьшается до тех пор, пока скорость первого шарика остается больше, чем у второго. Минимальное расстояние соответствует равным скоростям шариков. Таким образом, скорость V можно определить, пользуясь законом сохранения импульса (систему шариков считаем изолированной):

$$m_1 v = m_1 V + m_2 V.$$

начальный им-
конечный им-
конечный им-
пульс системы
пульс шарика 1
пульс шарика 2

Отсюда

$$V = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2}.$$

Воспользовавшись теперь законом сохранения энергии, получаем

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 V^2 + \frac{1}{2} m_2 V^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{d}.$$

Левая часть уравнения выражает начальную энергию замкнутой системы, равную кинетической энергии шарика 1. Конечная полная энергия системы (в момент наименьшего расстояния между шариками) равна сумме кинетических энергий обоих шариков, а также потенциальной энергии их взаимного электрического отталкивания; d — наименьшее расстояние между шариками. Мы можем найти его, подставив в последнее уравнение значение V , полученное выше, тогда

$$d = \frac{Q^2 (m_1 + m_2)}{2\pi\epsilon_0 m_1 m_2 v^2}.$$

Подставляя численные значения величин и учитывая, что $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{К}^2$, в обоих случаях получаем

$$d = 20 \text{ см.}$$

Тот факт, что в обоих случаях мы получаем одно и то же значение d , вытекает из принципа относительности движения. Существенна относительная скорость движения шариков, а не их скорость в какой-либо инерциальной системе отсчета.

Принцип относительности позволяет решать многие задачи в «естественной» системе отсчета, связанной с центром масс системы. Решить данную задачу в такой системе отсчета предлагаем самим читателям.

После максимального сближения шарики начинают удаляться друг от друга. Скорости шариков 1 и 2 спустя достаточно длительное время обозначим через V_1 и V_2 . Как определить эти скорости? Можно воспользоваться законами сохранения. Оба шарика вместе образуют изолированную систему, в которой должны выполняться законы сохранения импульса и энергии. Соответствующие уравнения имеют вид

$$m_1 v = m_1 V_1 + m_2 V_2 \quad (\text{импульс}),$$

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 \quad (\text{энергия}).$$

Не будем решать приведенные уравнения, так как это не самое важное для нас. Интересен тот факт, что полученные уравнения имеют такой же вид, как и для шарика, упруго отскакивающего от неподвижного шарика. Дело в том, что при использовании законов сохранения мы принимаем во внимание только начальные и конечные состояния системы, не интересуясь самим процессом торможения: безразлично, вызвано ли торможение силами электрического отталкивания или силами упругости.

2. Протоны, ударяясь о металлический шар, отдают ему свой заряд (оседают на шаре), вследствие чего шар постепенно заряжается. Электризуясь, шар

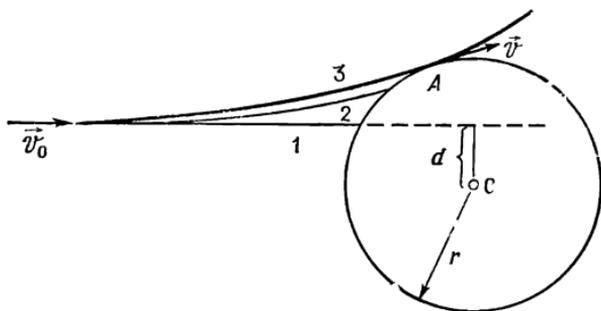


Рис. 74

отталкивает бомбардирующие его протоны, изменяя их траектории (рис. 74).

В конце концов протоны начинают двигаться по траектории 3, проходящей вблизи поверхности шара (не касаясь его). После этого процесс электризации шара прекращается. Нас интересует потенциал шара U в этот момент. Воспользовавшись законом сохранения энергии для каждого протона, можем записать:

$$E = \underbrace{eU}_{\substack{\text{потенциальная} \\ \text{энергия протона} \\ \text{вблизи поверх-} \\ \text{ности шара}}} + \frac{1}{2} mv^2, \quad (1)$$

где e — заряд протона, v — скорость протонов в точке A . Начальная потенциальная энергия равна нулю, поскольку протон находится далеко от шара.

Отметим, что сила, действующая на протоны, является центральной силой. Взаимодействие каждого

летящего протона с зарядом на шаре таково, как если бы весь заряд шара был сконцентрирован в его геометрическом центре 0. Предполагаем, что заряд распределяется равномерно по всей поверхности шара и что протон, приближаясь к шару, не изменяет распределения зарядов на нем. Подобное предположение вполне правомочно, так как заряд протона мал по сравнению с макроскопическим зарядом всего шара, а плотность протонов в пучке невелика.

Поскольку взаимодействие между шаром и протоном можно считать обусловленным центральной силой, воспользуемся законом сохранения момента импульса относительно центра шара:

$$mv_0d = mvr,$$

где m — масса протона, v_0 — начальная скорость протонов, испускаемых ускорителем. Разделив обе части уравнения на m , получаем

$$v_0d = vr.$$

Отсюда находим

$$\frac{1}{2} mv^2 = \left(\frac{d}{r}\right)^2 E,$$

где

$$E = \frac{1}{2} mv_0^2.$$

Подставив это выражение в соотношение (1), находим

$$U = \left(1 - \frac{d^2}{r^2}\right) \frac{E}{e}.$$

При численных значениях величин, данных в условии задачи,

$$U = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \frac{2 \text{ кэВ}}{e} = 1500 \text{ В}.$$

Следует обратить внимание на то, что протоны, бомбардирующие шар, могут выбивать с его поверхности электроны. Это явление может несколько ускорить процесс электризации шара. Однако если бы шар бомбардировали пучком электронов, то указанное явление ускорило бы разрядку шара. Процесс электризации шара прекратился бы в момент установления динамического равновесия между количеством электронов, «осевших» на шаре, и количеством электро-

нов, выбитых с его поверхности. Предельная траектория в таком случае не будет траекторией 3; она будет проходить так, как траектория 2, однако значительно ближе к траектории 3, чем показано на рисунке. При бомбардировке шара пучком электронов потенциал шара не может достигнуть величины, рассчитанной выше.

3. Прежде всего необходимо учесть, что трамплины опираются посередине на бесконечно тяжелые подпорки (рис. 75). Соскок первого из акробатов связан с движением второго, так что можно считать, что происходит «столкновение» акробатов «через» трамплин.



Рис. 75

Считаем также, что столкновение происходит практически мгновенно. Значит, можно не учитывать влияния силы тяжести на сам процесс столкновения, так как за время столкновения Δt изменение момента импульсов (относительно центра трамплина) каждого из акробатов, связанное с силой тяжести и пропорциональное Δt , ничтожно мало.

Во время «столкновения» точка опоры трамплина неподвижна, поэтому можно использовать закон сохранения момента импульса. Моментами импульсов самих трамплинов пренебрегаем.

Учитывая примечание к условию задачи и приведенные выше рассуждения, будем считать, что во время «столкновения» кинетическая энергия сохраняется, т. е. соударение абсолютно упругое.

Обозначим через v'_1 скорость первого из акробатов после соударения. Будем считать, что v'_1 положительна и имеет то же направление, что и скорость v_1 (рис. 75). На основании законов сохранения момента импульса и кинетической энергии запишем следующие уравнения:

$$m_1 v_1 r = m_1 v'_1 r + m_2 v_2 r,$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v'^2_1}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Решая эту систему уравнений относительно v'_1 и v_2 , получаем два решения:

$$\text{а) } v'_1 = v_1, \quad v_2 = 0,$$

$$\text{б) } v'_1 = v_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}, \quad v_2 = v_1 \frac{2m_1}{m_1 + m_2}.$$

Первое решение соответствует ситуации перед соударением, второе описывает состояние системы после соударения.

Второй из акробатов падает на следующий трамплин и в момент соударения имеет скорость v_2 . Последующее столкновение происходит аналогично первому. Значит, скорости, с которыми движутся следующие акробаты, равны соответственно

$$v_3 = v_2 \frac{2m_2}{m_2 + m_3},$$

$$v_4 = v_3 \frac{2m_3}{m_3 + m_4},$$

$$v_5 = v_4 \frac{2m_4}{m_4 + m_5}.$$

Тогда скорость, с которой движется пятый акробат, можно выразить так:

$$v_5 = 16 \frac{m_1 m_2 m_3 m_4}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)(m_3 + m_4)(m_4 + m_5)} v_1.$$

Искомую высоту h_5 определим, пользуясь соотношениями

$$v_1 = \sqrt{2gh_1}, \quad v_5 = \sqrt{2gh_5}.$$

Отсюда

$$h_5 = \left(\frac{16m_1 m_2 m_3 m_4}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)(m_3 + m_4)(m_4 + m_5)} \right)^2 h_1.$$

Подставив численные значения величин, находим $h_5 \approx 5,5$ м.

4. Из условия задачи ясно, что система шайба + стержень является изолированной. Следовательно, при описании системы можно воспользоваться законами сохранения импульса, момента импульса и энергии, причем, поскольку соударение между шайбой и стержнем упругое, полная кинетическая энергия системы до и после соударения одинакова. Под полной

кинетической энергией системы следует понимать сумму кинетических энергий поступательного и вращательного движения обоих тел, т. е. шайбы и стержня. Согласно условию задачи, после первого соударения центр стержня и шайба движутся с одинаковыми скоростями — в противном случае второго соударения ровно через половину оборота стержня не произошло бы. Введем следующие обозначения:

V — общая скорость центра масс стержня и шайбы (относительно поверхности стола) между соударениями,

ω — угловая скорость стержня между соударениями,

v — скорость шайбы до первого соударения.

Полный импульс системы до первого соударения равен mv , тогда как после первого, но до второго соударения он равен $mV + MV = (m + M)V$. Из закона сохранения импульса следует

$$mv = (m + M)V,$$

т. е.

$$v = (1 + \mu)V.$$

Полная энергия системы перед первым соударением равна кинетической энергии шайбы $mv^2/2$. После соударения она равна сумме кинетической энергии шайбы, кинетической энергии поступательного движения стержня и кинетической энергии вращательного движения стержня:

$$\frac{1}{2} mV^2 + \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} I\omega^2,$$

или

$$\frac{1}{2} (m + M)V^2 + \frac{1}{6} MW^2,$$

где W — скорость конца стержня в системе отсчета, в которой центр масс стержня после соударения покоится.

Так как полная кинетическая энергия системы сохраняется, то

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} (m + M)V^2 + \frac{1}{6} MW^2,$$

или иначе

$$v^2 = (1 + \mu)V^2 + \frac{1}{3} \mu W^2.$$

Закон сохранения момента импульса утверждает, что если полный момент внешних сил относительно неподвижной точки в инерциальной системе отсчета (или относительно центра масс механической системы) тождественно равен нулю, то момент импульса системы относительно этой точки (или центра масс) не изменяется во времени. В нашем случае момент импульса выгоднее рассматривать в системе, которая движется со скоростью V . В этой системе центр массы стержня O между соударениями покоится. В рассматриваемой системе относительная скорость шайбы перед соударением равна $v - V$. Тогда момент импульса шайбы относительно точки O равен $m(v - V)l$. Это выражение одновременно определяет и полный начальный момент импульса всей системы, поскольку перед первым соударением момент импульса стержня относительно точки O равнялся нулю. На самом деле импульс стержня перед соударением в движущейся системе отсчета отличен от нуля, но его плечо равно нулю.

Полный момент импульса после соударения равен сумме моментов импульсов стержня и шайбы. Относительно точки O шайба имеет теперь нулевую скорость, значит, и ее момент импульса в этой системе отсчета равен нулю: $I\omega + 0 = I\omega = \frac{1}{3}MWl$. Отсюда

$$m(v - V)l = \frac{1}{3}MWl,$$

или

$$v - V = \frac{1}{3}\mu W.$$

Таким образом, имеем три уравнения с тремя неизвестными V , W и μ

$$v = (1 + \mu)V,$$

$$v^2 = (1 + \mu)V^2 + \frac{1}{3}\mu W^2,$$

$$v - V = \frac{1}{3}\mu W.$$

Подставив v из первого уравнения в два остальных, получаем

$$(1 + \mu)^2 V^2 = (1 + \mu)V^2 + \frac{1}{3}\mu W^2,$$

$$(1 + \mu)V - V = \frac{1}{3}\mu W,$$

или

$$(1 + \mu) V^2 = \frac{1}{3} W^2,$$

$$W = 3V.$$

Тогда

$$(1 + \mu) V^2 = 3V^2.$$

Но между соударениями $V \neq 0$, значит,

$$\mu + 1 = 3, \quad \mu = 2.$$

Таким образом, описанное явление возможно в том и только том случае, когда $\mu = 2$. Заметим, кстати, что мы установили также соотношение $W = 3V$. Это означает, что в системе отсчета, связанной со стержнем, скорость конца стержня в три раза больше линейной скорости центра стержня относительно стола, независимо от начальной скорости шайбы v .

Подставим найденное значение $\mu = 2$ в приведенные выше три уравнения; они принимают вид

$$v = 3V,$$

$$v^2 = 3V^2 + \frac{2}{3} W^2,$$

$$v - V = \frac{2}{3} V,$$

При заданной начальной скорости v имеем только две неизвестные величины V и W в трех уравнениях. Однако они не противоречат друг другу: μ определено таким образом, чтобы противоречия не возникло. Решая данную систему, можно определить V и W , а также $\omega = W/l$. Зная же эти величины, можно вычислить время, по истечении которого произойдет второе соударение, а также путь, пройденный центром стержня между соударениями. Определение этих величин предоставляем выполнить читателю.

Проанализируем теперь ситуацию после второго соударения. Сразу напрашивается мысль, что второе соударение следует рассматривать по аналогии с первым, т. е. записать систему уравнений (принимая $\mu = 2$), выражающих законы сохранения импульса, момента импульса и энергии. В этих уравнениях скорость стержня (линейная и угловая), а также скорость шайбы между соударениями полагаем известными. Неизвестными, которые нужно определить, бу-

дут скорости стержня и шайбы после второго соударения. Однако мы можем избежать всех этих длинных вычислений.

Попробуем описать ситуацию после второго соударения, вообще не прибегая к вычислениям. Введем следующие обозначения:

- u — скорость шайбы,
- U — скорость центра масс стержня,
- Ω — угловая скорость стержня.

Предположим, что нам известны значения импульса, момента импульса и кинетической энергии, которые соответственно равны P_0 , M_0 и E_0 . Из законов сохранения следует, что после каждого соударения импульс, момент импульса и кинетическая энергия являются функциями u , U , Ω и сохраняются:

$$\begin{aligned} \text{импульс } P(u, U, \Omega) &= P_0, \\ \text{момент импульса } M(u, U, \Omega) &= M_0, \\ \text{кинетическая энергия } E(u, U, \Omega) &= E_0. \end{aligned}$$

Мы получили три уравнения, содержащие u , U и Ω . Легко видеть, что первые два из них линейны, а третье является квадратичным уравнением относительно переменных u , U и Ω . Тогда для всякой тройки значений P_0 , M_0 и E_0 существует два решения u , U и Ω , удовлетворяющих этим уравнениям. Одно из этих решений соответствует первоначальной ситуации:

$$u = v, \quad U = 0, \quad \Omega = 0.$$

После первого соударения система шайба + стержень приобретает скорости

$$u = V, \quad U = V, \quad \Omega = \omega.$$

При втором соударении состояние системы шайба + стержень должно измениться. Однако мы имеем только два возможных решения u , U и Ω , а значит, после второго соударения скорости тел снова должны равняться их первоначальным значениям. После двух соударений скорости стержня и шайбы будут такими же, как и вначале, т. е. стержень будет покоиться относительно стола (располагаясь параллельно своему первоначальному положению), а шайба будет перемещаться с такой же скоростью, с которой она двигалась до первого соударения (с той разницей, что те-

перь она будет двигаться по другую сторону от стержня).

В заключение немного отойдем от конкретной задачи и рассмотрим, что бы случилось, если бы вместо одного стержня имелась целая система стержней (рис. 76).

Как в этом случае происходили бы столкновения? Очевидно, с каждым отдельным стержнем шайба взаимодействовала бы так, как описано выше, причем

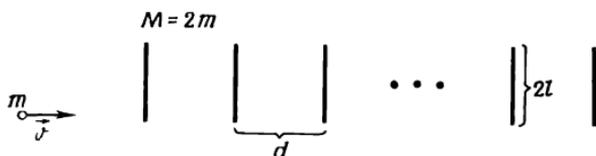


Рис. 76

после каждых двух соударений стержень останавливался бы в положении, параллельном первоначальному и несколько смещенном относительно него. После соударения с последним стержнем этого «одномерного стержневого кристалла» скорость, импульс и кинетическая энергия шайбы будут такими же, как вначале. «Кристалл», несмотря на взаимодействия с шайбой, оказывается для нее как бы «прозрачным»! Нетрудно понять, что средняя скорость перемещения шайбы в «кристалле» $v_{\text{ср}} < v$, так как между двумя столкновениями с одним и тем же стержнем скорость шайбы равна $V < v$. Это напоминает прохождение света через прозрачный кристалл. Очевидно, при прохождении света механизм явления гораздо сложнее, однако с некоторым приближением его можно представить себе, воспользовавшись рассмотренной выше простой механической моделью.

Зная расстояние d между стержнями, можно определить среднюю кинетическую энергию E шайбы в «кристалле» и его средний импульс $p_{\text{ср}}$. Если бы движение шайбы в «кристалле» описывалось только средними величинами, то оказалось бы, что шайба в «кристалле» ведет себя так, как если бы она имела иную массу!

Вместо ожидаемой связи

$$E_{\text{ср}} = \frac{p_{\text{ср}}^2}{2m}$$

выполнялась бы зависимость

$$E_{\text{ср}} = \frac{p_{\text{ср}}^2}{2m^*},$$

где $m^* \neq m$, в чем читатель может убедиться сам. В связи с этим не должен вызывать удивления тот факт, что электроны в кристалле ведут себя так, как если бы они имели массу, отличную от их массы в вакууме. Прохождение электрона через кристалл намного сложнее, чем рассмотренная нами модель, однако результат тот же: электрон при этом имеет некоторую эффективную массу, отличную от массы свободного электрона.

5. В системе отсчета, связанной с центром масс пары электрон — позитрон, импульс пары, очевидно, равен 0, в то же время начальный импульс фотона отличен от 0. (Этот импульс отличен от импульса фотона в лабораторной системе, но это не суть важно, важно лишь то, что он отличен от 0.)

Поскольку импульс фотона отличен от импульса системы электрон — позитрон, то без взаимодействия с другими частицами или полями превращение фотона в пару частиц невозможно: в таком случае нарушался бы закон сохранения импульса. Образование пары возможно вблизи атомных ядер или других объектов, которые участвуют в процессе образования пары, отдавая часть своего импульса, благодаря чему закон сохранения импульса выполняется.

В процессе образования пары вблизи тяжелой частицы, т. е. в том случае, о котором идет речь в задаче, имеем:

$$h\nu = 2mc^2,$$

энергия фотона в лабораторной системе	=	начальная энергия пары
---	---	------------------------------

Отсюда находим

$$\nu = 2mc^2/h \quad (\approx 2,5 \cdot 10^{12} \text{ Гц}).$$

Дополнительная бесконечно тяжелая частица не дает никакого вклада в энергию, хотя и уносит часть импульса. Аналогичную ситуацию мы имеем, например, когда мяч при ударе отскакивает от стены: кинетическая энергия стены практически не изменяется, а

импульс мяча изменяет направление на противоположное.

6. При движении маятника в грузике возбуждаются вихревые токи и грузик нагревается (закон Джоуля — Ленца). Поскольку, согласно условию задачи, состояние системы, создающей магнитное поле, не изменяется, выделившееся в грузике тепло равно разности потенциальной энергии грузика в начале и в конце колебаний. Получаем

$$mg \Delta h = mc \Delta T, \quad \Delta h = \frac{1}{2} l.$$

Тогда

$$\Delta T = \frac{gl}{2c} \quad (\approx 0,025\text{K}).$$

7. При ударе кубика о стену составляющая импульса, параллельная поверхности стены, изменяется, что обусловлено действием силы трения. Сила трения в каждый момент движения по поверхности пропорциональна силе нормального давления стены, действующей на кубик (сила нормального давления перпендикулярна к поверхности). Изменение силы нормального давления со временем приводит к изменению перпендикулярной составляющей импульса на $\Delta p_{\perp} = 2p_{\perp}$, где p_{\perp} — составляющая начального импульса кубика, перпендикулярная к поверхности стены. Поскольку сила трения пропорциональна силе нормального давления, из второго закона Ньютона ($\Delta p = F \Delta t$) можно найти изменение параллельной составляющей импульса:

$$\Delta p_{\parallel} = 2p_{\perp} f.$$

Такое изменение импульса наблюдается в случае, когда при соударении все время происходит проскальзывание кубика о стену или когда все время кубик имеет отличную от нуля составляющую импульса, параллельную стене. Случай, когда сила трения в определенный момент исчезает, будет рассмотрен особо. Угол падения кубика удовлетворяет соотношению

$$\operatorname{tg} \alpha = p_{\parallel} / p_{\perp}.$$

Для угла отражения

$$\operatorname{tg} \beta = (p_{\parallel} - 2p_{\perp} f) / p_{\perp} = \operatorname{tg} \alpha - 2f,$$

или

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha - 2f.$$

Подставив значение $f = \sqrt{3}/6$, данное в условии задачи, получаем

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{3}/3 = \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} 30^\circ.$$

Трение может затормозить движение кубика в направлении, параллельном стене, однако не может стать причиной движения кубика в обратную сторону. Наименьшее значение p_{\parallel} , следовательно, равно 0. Этому соответствует $\beta = \operatorname{tg} \beta = 0$. Если для углов α выполняется условие

$$\alpha \leq \operatorname{arctg} 2f = 30^\circ,$$

то угол β , как вытекает из предыдущего, должен бы быть отрицательным, т. е. параллельная стене составляющая импульса кубика должна изменить знак

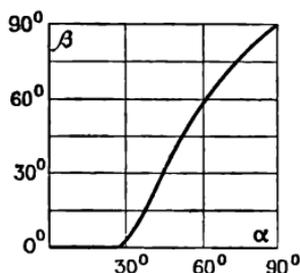


Рис. 77

на противоположный, что невозможно. Поэтому получаем

$$\operatorname{tg} \beta = \begin{cases} 0 & \text{для } \alpha \leq 30^\circ, \\ \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} 30^\circ & \text{для } \alpha > 30^\circ. \end{cases}$$

На рис. 77 представлен график функции $\beta(\alpha)$. Для углов падения, меньших 30° , кубик отскакивает от стены перпендикулярно.

8. Поскольку составляющая скорости, перпендикулярная к ракетке, до и после соударения имеет одинаковую абсолютную величину, шарик будет возвращаться назад по той же траектории в том и только

том случае, когда при отскоке шарика от ракетки касательная составляющая его скорости изменит знак, не изменяя абсолютной величины.

Значит, изменения параллельной и перпендикулярной составляющей импульса должны удовлетворять уравнениям

$$\Delta p_{\perp} = 2Mv \cos \alpha,$$

$$\Delta p_{\parallel} = 2Mv \sin \alpha.$$

Изменение перпендикулярной составляющей импульса Δp_{\perp} происходит под действием силы упругости шарика и ракетки, тогда как изменение параллельной составляющей обусловлено действием силы трения. Сила трения действует вдоль прямой, проходящей на расстоянии R от оси вращения шарика, поэтому она изменяет момент импульса шарика относительно оси вращения на $\Delta p_{\parallel}R$. Изменение момента импульса шарика, связанное с силами упругости, равно 0, поскольку прямая, вдоль которой действуют эти силы, проходит через центр шарика. Тогда имеем

$$I\omega - I\omega_k = \Delta p_{\parallel}R,$$

где ω_k — конечная угловая скорость шарика. Тогда

$$\omega_k = \omega - \frac{\Delta p_{\parallel}R}{I}.$$

Учитывая, что $I = \frac{2}{3}MR^2$, получаем

$$\omega_k = \omega - \frac{\Delta p_{\parallel}}{\frac{2}{3}MR}.$$

Конечная скорость скольжения шарика относительно ракетки, или скорость, с которой по ракетке перемещается точка соприкосновения, равна

$$v_{\text{ск}} = -v \sin \alpha + R \left(\omega - \frac{\Delta p_{\parallel}}{\frac{2}{3}MR} \right)$$

Подставляя значения Δp_{\parallel} , находим

$$v_{\text{ск}} = R\omega - 4v \sin \alpha.$$

Трение может замедлить скольжение, однако оно не может изменить знак скорости скольжения. Иначе го-

зоря, должно выполняться неравенство

$$v_{\text{ск}} \geq 0.$$

Возможны два случая.

а. В момент отскока проскальзывание уже отсутствует:

$$v_{\text{ск}} = 0.$$

Отсюда сразу получаем

$$\sin \alpha = \frac{R\omega}{4v}.$$

Подставив в это уравнение значения ω и v , данные в условии задачи, получаем

$$\sin \alpha = \frac{x}{4},$$

или

$$\alpha = \arcsin \frac{x}{4}.$$

Отсутствие трения в момент отскока означает, что сила трения действует не на протяжении всего времени соударения. Тогда

$$\Delta p_{\parallel} \leq f \Delta p_{\perp}.$$

Используя полученные ранее выражения для Δp_{\parallel} и Δp_{\perp} , находим

$$\begin{aligned} 2Mv \sin \alpha &\leq f 2Mv \cos \alpha, \\ \text{tg } \alpha &\leq f, \end{aligned}$$

откуда

$$\sin \alpha \leq \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}.$$

Подставив известное значение f , убедимся, что скольжение в момент отскока отсутствует при

$$\sin \alpha \leq \frac{3}{5},$$

т. е. при

$$x \leq \frac{12}{5}.$$

б. В момент отскока происходит проскальзывание. В этом случае сила трения действует на протяжении всего соударения. Тогда имеем

$$\begin{aligned}\Delta p_{\parallel} &= f \Delta p_{\perp}, \\ 2Mv \sin \alpha &= f 2Mv \cos \alpha, \\ \operatorname{tg} \alpha &= f, \\ \sin \alpha &= \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}.\end{aligned}$$

При заданном значении $f = 3/4$

$$\sin \alpha = \frac{3}{5},$$

или

$$\alpha = \arcsin \frac{3}{5}.$$

Зависимость α от x представлена на рис. 78. Как видим, если шарик вращается быстро ($\omega \geq 12/5 v/R$), то ракетку следует подставить под углом α , таким,

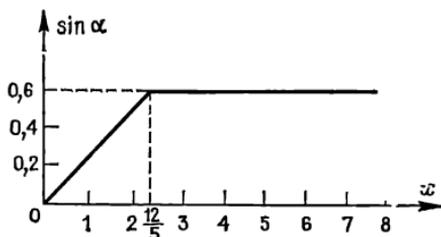


Рис. 78

чтобы $\sin \alpha = 3/5$. Если шарик вращается медленно ($\omega < 12/5 v/R$), то угол α зависит от x и $\sin \alpha = x/4$.

В приведенном решении задачи мы приняли, что единственной силой, действующей касательно к ракетке, является сила трения. На практике такое представление достаточно хорошо выполняется для шариков, используемых в настольном теннисе, и ракеток с пробковым покрытием. Если в плоскости ракетки на шарик действуют также упругие силы, то это условие не выполняется. При определенных условиях эта сила может изменить знак не только линейной скорости, но и угловой. Упругие силы, действующие в плоскости отражающей поверхности, определяют та-

кое движение упругого шарика, что при соответствующем броске он может долго прыгать вперед-назад (рис. 79).

В заключение покажем, как получается приведенная в условии задачи формула для момента инерции шарика.

Будем считать, что толщина стенок шарика много меньше его радиуса. Разобьем поверхность шарика на

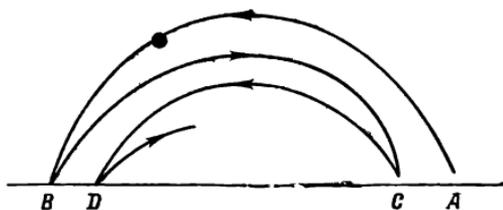


Рис. 79

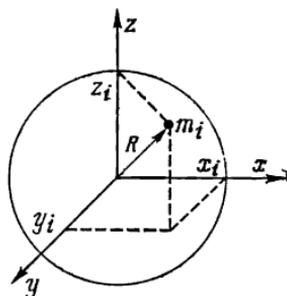


Рис. 80

очень маленькие кусочки массой m_i (рис. 80). Совместим с центром шарика начало прямоугольной системы координат и рассмотрим одну из ее осей. С учетом симметричной формы шарика безразлично, какую ось мы выберем. Пусть это будет ось z . Можно записать

$$I = m_1(x_1^2 + y_1^2) + m_2(x_2^2 + y_2^2) + \dots,$$

или

$$I = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2).$$

Из соображений симметрии имеем

$$\sum_i m_i x_i^2 = \sum_i m_i y_i^2 = \sum_i m_i z_i^2 = A,$$

$$3A = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) =$$

$$= \sum_i m_i R^2 = MR^2.$$

Тогда

$$A = \frac{1}{3} MR^2$$

и

$$I = 2A = \frac{2}{3} MR^2.$$

Эту формулу можно получить и другим способом. Воспользовавшись формулой момента инерции шара ($\frac{2}{5}MR^2$), можно получить момент инерции полого шара и перейти к пределу, устремив внутренний радиус к внешнему (при условии, что масса остается неизменной). Выполнить соответствующие расчеты предоставляем читателю.

Две последние задачи иллюстрируют тот факт, что при «отражении» материального тела от неподвижной преграды угол падения не обязательно равен углу «отражения». Может случиться, что футбольный мяч, уже пройдя линию ворот, отразится от внутренней штанги и вместо того, чтобы влететь в ворота, выйдет вновь на площадку.

Колебания

1. Рассмотрим электрический контур, показанный на рис. 81, а. Пусть q и i означают соответственно заряд на конденсаторе и силу тока в момент $t = 0$, а Q

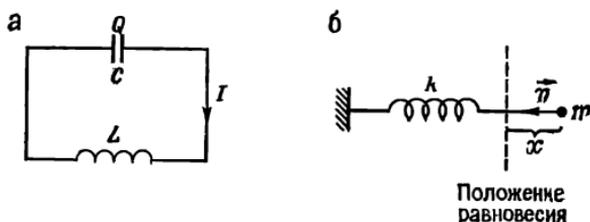


Рис. 81

и I — заряд и ток в момент t . В системе нет внешнего источника тока. Как следует из второго закона Кирхгофа, сумма напряжений на конденсаторе и катушке должна равняться нулю:

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} Q = 0,$$

но

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

Значит,

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{1}{C} Q. \quad (1)$$

Мы получили дифференциальное уравнение, которое при известных L и C можно решить и получить зави-

симось $Q(t)$, т. е. определить, каким образом заряд конденсатора изменяется со временем.

Мы видим, что «ускорение» заряда, или его вторая производная по времени, пропорционально самому заряду. Подобная ситуация имеет место в механике при описании гармонического движения. При гармонических колебаниях вторая производная отклонения тела (ускорение) от положения равновесия пропорциональна отклонению. Например, для шарика массой m (рис. 81, б), привязанного к закрепленной одним концом невесомой пружине, имеющей коэффициент упругости k и лежащей на горизонтальном гладком столе, имеем

$$m\vec{a} = -k\vec{x},$$

где \vec{a} — ускорение шарика, \vec{x} — его отклонение от положения равновесия. Знак минус в правой части уравнения означает, что ускорение и отклонение направлены в противоположные стороны. Будем считать, что колебания совершаются вдоль одной оси, например вдоль оси x . Тогда скорость шарика v определяется формулой $v = dx/dt$, а ускорение $a = dv/dt$. Тогда можно записать

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \quad (2)$$

Это дифференциальное уравнение, из которого, зная m и k , можно определить функцию $x(t)$, иными словами, зависимость отклонения от времени.

Уравнения (1) и (2), несмотря на различия входящих в них параметров, одинаковы. Если взять решение одного из них и заменить одни параметры соответствующими параметрами, которые введены во втором уравнении, то получим решение второго уравнения. Именно так должно быть, поскольку ход решения уравнения не зависит от того, какими буквами обозначены входящие в него величины. Установим теперь соответствие между величинами, входящими в эти два уравнения. Очевидно, что массе m можно сопоставить индуктивность L , коэффициенту упругости k — величину, обратную емкости $1/C$, а отклонению x — заряд Q . Далее посмотрим, какие еще механические величины, не входящие непосредственно в уравнение (2), можно сопоставить электрическим.

Скорость определяем как производную координаты по времени:

$$v = \frac{dx}{dt}.$$

Согласно установленному соответствию, x переходит в Q , а t не изменяется. Значит,

$$v = \frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{dQ}{dt} = I.$$

Электрическая величина, соответствующая скорости, — это сила тока.

Кинетическая энергия шарика равна

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2.$$

Поскольку при замене механической системы ее электрическим аналогом $m \rightarrow L$, а $v \rightarrow I$, можно записать

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2 \rightarrow \frac{1}{2} LI^2 = E_L.$$

Следовательно, кинетической энергии шарика соответствует энергия, накопленная в катушке, через которую проходит ток.

Аналогично потенциальной энергии натянутой пружины соответствует энергия, которой обладает заряженный конденсатор:

$$E_{\text{п}} = \frac{1}{2} kx^2 \rightarrow \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = E_C.$$

Теперь рассмотрим дифференциальное уравнение (2). Школьная программа не включает дифференциальных уравнений, но окончательное решение этого уравнения, зависимость $x(t)$ при гармоническом движении, приводится в школьном курсе:

$$x(t) = x_0 \sin \left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0 \right),$$

где x_0 — амплитуда колебаний, или величина наибольшего отклонения, T — период колебаний, φ_0 — начальная фаза, или величина аргумента функции в момент $t = 0$. Обычно, чтобы избавиться от дроби, вводится величина ω , равная $2\pi/T$. Тогда

$$x(t) = x_0 \sin (\omega t + \varphi_0). \quad (3)$$

Для шарика, колеблющегося на пружине,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Как в таком случае изменяется скорость шарика? Как мы уже говорили, скорость $v = dx/dt$. Тогда, дифференцируя уравнение (3), получаем

$$v(t) = x_0 \omega \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Скорость имеет наибольшую абсолютную величину v_{\max} , когда $\cos = \pm 1$ (при этом $x = 0$), следовательно

$$v_{\max} = x_0 \omega.$$

Теперь посмотрим, чему эквивалентно последнее выражение при переходе от механической системы к электрической.

Отметим, что Q изменяется по закону

$$Q(t) = Q_0 \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где $\omega = 2\pi/T$. $|Q_0|$ — наибольшая величина заряда на конденсаторе. Поскольку при замене механической системы электрической $m \rightarrow L$, а $k \rightarrow 1/C$, то

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{LC}},$$
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow 2\pi \sqrt{LC}.$$

Силу тока можно определить двумя способами. Ее можно записать как производную заряда $Q(t)$ по времени или воспользоваться зависимостью v от t для механической системы и заменить механические величины их электрическими аналогами:

$$I(t) = Q_0 \omega \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right),$$

где

$$T = 2\pi \sqrt{LC}.$$

Тогда наибольшая величина силы тока в контуре равна

$$I_{\max} = |Q_0| \omega = \frac{|Q_0|}{\sqrt{LC}}.$$

Итак, в контуре происходят синусоидальные колебания, причем фазы колебаний заряда Q и тока I сдвинуты на $\pi/2$: $Q \sim \sin(\omega t + \varphi_0)$, $I \sim \cos(\omega t + \varphi_0)$.

Отметим, что независимо от величины Q_0 и φ_0 , если только $\omega = 1/\sqrt{LC}$, то $Q(t)$ определяется уравнением (1). В принципе решением этого уравнения является не одна какая-то функция $Q(t)$, но целое семейство функций, каждая из которых соответствует определенным, конкретным значениям Q_0 и φ_0 . На первый взгляд это выглядит странным. Казалось бы, что если имеется конкретная система, то должна существовать только одна функция $Q(t)$, описывающая изменение заряда конденсатора со временем. Это неверно. В данной системе могут происходить различные колебания, например отличающиеся по амплитуде. Очевидно, что два колебания с различными амплитудами не могут описываться одинаковыми зависимостями $Q(t)$. Чтобы определить конкретную функцию $Q(t)$, т. е. установить значения Q_0 и φ_0 для данной системы, нужно видеть за схемой нечто большее, чем просто соединенные между собой отдельные элементы. В нашем случае, например, помимо самой схемы для определения Q_0 и φ_0 , а следовательно, $Q(t)$ необходимо знать величину заряда на конденсаторе и силу тока в контуре в момент $t = 0$. Это так называемые начальные условия. По известным начальным условиям можно из семейства функций $Q(t)$ выбрать одну, описывающую конкретный случай колебания.

В рассматриваемой задаче электрическая система описывается следующими начальными условиями:

$$Q(0) = q, \quad I(0) = 0.$$

Второе равенство означает, что в момент подключения катушки к конденсатору ($t = 0$) ток в контуре равен нулю. Итак, имеем:

$$Q_0 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot 0 + \varphi_0\right) = q,$$
$$Q_0 \frac{1}{\sqrt{LC}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot 0 + \varphi_0\right) = 0.$$

Произведя несложные вычисления, получаем

$$Q_0 = q, \quad \varphi_0 = \pi/2.$$

Значит, в рассматриваемой нами системе при заданных начальных условиях величины Q и I изменяются по следующим законам:

$$Q(t) = q \sin \left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t + \frac{\pi}{2} \right),$$

$$I(t) = q \frac{1}{\sqrt{LC}} \cos \left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t + \frac{\pi}{2} \right),$$

или

$$Q(t) = q \cos \frac{t}{\sqrt{LC}},$$

$$I(t) = - \frac{q}{\sqrt{LC}} \sin \frac{t}{\sqrt{LC}}.$$

Наибольшие абсолютные значения Q и I соответственно равны $|q|$ и $|q|/\sqrt{LC}$. Период изменения Q и I равен $T = 2\pi \sqrt{LC}$.

Таким образом, мы получили ответы на первые три вопроса, поставленные в условиях задачи. Чтобы ответить на четвертый вопрос, рассмотрим контур, по-

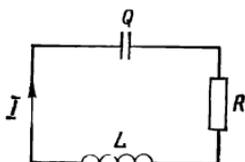


Рис. 82

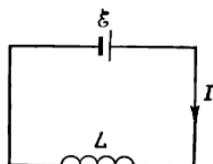


Рис. 83

казанный на рис. 82. Согласно второму закону Кирхгофа, сумма падений напряжения на отдельных элементах контура должна быть равна нулю, если контур не имеет внешнего источника э. д. с. Значит,

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + RI = 0,$$

или

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} = - \frac{1}{C} Q - R \frac{dQ}{dt}.$$

Механической аналогией этой зависимости является

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = - kx - \gamma \frac{dx}{dt},$$

или

$$ma = - kx - \gamma v.$$

Сравнивая эти выражения, видим, что падение напряжения на сопротивлении, равное $R \cdot dQ/dt$, соответствует тормозящей силе γv , пропорциональной скорости. В механике сила, пропорциональная скорости, связана с движением в вязких средах. Резистор, таким образом, является аналогом вязкой среды.

Нам осталось ответить еще на один вопрос. Необходимо определить зависимость силы тока от времени в контуре, состоящем из источника с постоянной э. д. с., имеющего нулевое внутреннее сопротивление, и катушки. Такой контур показан на рис. 83. Из второго закона Кирхгофа имеем для этого контура

$$L \frac{dI}{dt} = \mathcal{E},$$

т. е. напряжение на катушке должно быть равно э. д. с. источника. Это уравнение можно записать в виде

$$L \cdot \frac{d^2Q}{dt^2} = \mathcal{E} = \text{const.} \quad (4)$$

В механической системе левой части этого уравнения аналогично выражение

$$m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \text{или} \quad ma.$$

Из механики известно, что $ma = F$, где F — сила, действующая на тело массой m и сообщающая ему ускорение a . Следовательно, механическим аналогом э. д. с. является сила F . В механике уравнение, эквивалентное (4), записывается как

$$ma = F = \text{const.}$$

Это уравнение описывает движение материального тела с постоянным ускорением a . Как известно, скорость при равноускоренном движении изменяется со временем по закону

$$v(t) = v_0 + at = v_0 + \frac{F}{m}t.$$

Поскольку при переходе от механической системы к электрической $v \rightarrow I$, $m \rightarrow L$, $F \rightarrow \mathcal{E}$, для рассматриваемой электрической системы можем записать

$$I(t) = I_0 + \frac{\mathcal{E}}{L}t.$$

Таким образом, мы получили ответ на последний вопрос. Как видно из этого уравнения, сила тока изме-

няется со временем равномерно (I_0 — величина тока в момент $t = 0$). Теперь вспомним о законе сохранения энергии. Система, изображенная на рис. 81, а, является изолированной, поэтому ее полная энергия, равная сумме кинетической и потенциальной энергии, остается постоянной:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{const.}$$

Для электрической системы, показанной на рис. 81, б, это означает, что величина

$$\frac{1}{2}LI^2 + \frac{Q^2}{2C} = \text{const.}$$

Воспользуемся этим фактом при решении следующей задачи.

Уравнение (1) можно почленно умножить на произвольную постоянную величину и ввести эту постоянную под знак дифференцирования

$$\beta \frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{d^2\beta f(x)}{dx^2}.$$

Значит, уравнение (1) можно записать в различных формах, например:

$$C \frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{1}{L}Q,$$

$$C \frac{d^2(CQ)}{dt^2} = -\frac{1}{L}(CQ),$$

В общем случае имеем

$$\alpha L \frac{d^2(\beta Q)}{dt^2} = -\frac{\alpha}{C}(\beta Q),$$

где α и β — некоторые постоянные, отличные от нуля.

Воспользовавшись рассмотренными здесь примерами и уравнением (2), можно было бы установить несколько «разных» электромеханических аналогов, например:

$$m \leftrightarrow C,$$

$$x \leftrightarrow Q,$$

$$k \leftrightarrow \frac{1}{L}.$$

Подобные аналогии можно развивать и дальше, устанавливая соответствие между другими электрическими и механическими величинами. Более того, все эти, казалось бы, внешне различные аналогии приводят к одним и тем же физическим выводам, в чем читатель может без труда убедиться сам. Именно поэтому слово «разные» взято в кавычки.

Рассмотренная задача иллюстрирует очень простой и очевидный принцип, о котором, пожалуй, слишком редко упоминают, хотя часто им пользуются. Этот принцип гласит, что одинаковые уравнения имеют одинаковые решения независимо от того, какой физический смысл имеют отдельные входящие в них величины. Этот принцип очень важен и позволяет упростить многие исследования. Между прочим, именно благодаря ему удастся проанализировать на ЭВМ разнообразные физические процессы.

2. При решении воспользуемся электромеханической аналогией, установленной в предыдущей задаче. Заметим, что, за исключением момента свечения неоновой лампочки, эта система ведет себя как груз массой L , закрепленный на конце пружины с коэффициентом упругости $1/C$, причем на груз действует внешняя сила \mathcal{E} . Далее легко заметить, что состоянию равновесия механической системы соответствует состояние, в котором заряд на конденсаторе равен $C\mathcal{E}$, а сила тока равна нулю. В начальный момент ток в контуре $I_0 = 0$, а конденсатор не заряжен — его заряд, следовательно, отличен от заряда в состоянии равновесия. В предыдущей задаче мы установили, что в такой системе будут происходить гармонические колебания, описываемые уравнением

$$(Q - C\mathcal{E}) = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Период этих колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{LC}.$$

Из начальных условий следует, что

$$A = -C\mathcal{E}, \quad \varphi_0 = 0.$$

Отсюда

$$Q = C\mathcal{E} - C\mathcal{E} \cos \omega t.$$

Ток определяем как производную от Q по времени:

$$I = C\mathcal{E}\omega \sin \omega t.$$

Напряжение на конденсаторе равно

$$U = \frac{Q}{C},$$

или

$$U = \mathcal{E} - \mathcal{E} \cos \omega t.$$

Напряжение на конденсаторе такое же, как и на неоновой лампе.

До сих пор мы рассматривали ситуацию до зажигания лампочки. Очевидно, что напряжение на неоновой лампочке изменялось бы по синусоидальному закону, как показано на рис. 84. Если бы лампа не загоралась, то по истечении полупериода $T/2 = \pi \sqrt{LC}$ напряжение на конденсаторе достигало бы значения

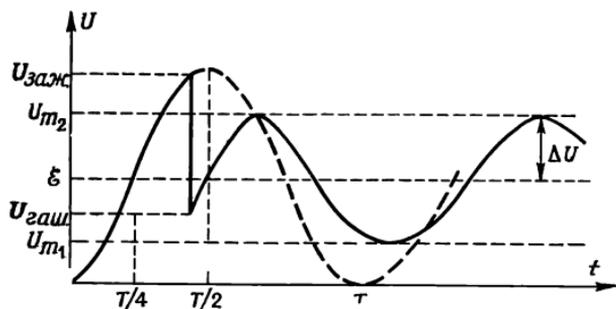


Рис. 84

$$U_{\text{гаш}} = 22 \text{ В}, \quad \mathcal{E} = 34 \text{ В}, \quad U_{\text{заж}} = 64 \text{ В}, \quad \Delta U = 20 \text{ В}, \quad U_{m1} = 14 \text{ В}, \\ U_{m2} = 54 \text{ В}$$

$2\mathcal{E} = 68 \text{ В}$. Однако этого не происходит, потому что при достижении $U_{\text{заж}} = 64 \text{ В}$ напряжение на конденсаторе скачком уменьшается до величины $U_{\text{гаш}} = 22 \text{ В}$. На графике этот скачок представлен вертикальным отрезком.

После выключения неоновой лампы ситуация вновь оказывается такой же, как вначале. Напряжение на конденсаторе и сила тока в контуре будут изменяться

по синусоидальному закону около положения равновесия, но начальные условия теперь будут иными: амплитуда и фазы начальных колебаний теперь могут быть другими, чем первоначальные.

Определим силу тока I' в контуре в момент, когда напряжение на конденсаторе достигает значения $U_{\text{зак}} = 64$ В. Используя электромеханическую аналогию, получаем, что если система совершает свободные колебания (а именно такую ситуацию мы имеем до и после зажигания неоновой лампы), то по закону сохранения энергии выражение

$$\frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2,$$

или его аналог для электрической системы

$$\frac{1}{2} \frac{1}{C} (Q - \mathcal{E}C)^2 + \frac{1}{2} LI^2,$$

должно иметь постоянную величину. Следовательно,

$$\frac{1}{2C} (CU_{\text{зак}} - \mathcal{E}C)^2 + \frac{1}{2} LI'^2 = \frac{1}{2C} (Q_0 - \mathcal{E}C)^2 + \frac{1}{2} LI_0^2,$$

где Q_0 и I_0 — соответственно заряд и сила тока в момент $t = 0$:

$$Q_0 = 0, \quad I_0 = 0.$$

Тогда

$$I' = \left\{ \frac{C}{L} [\mathcal{E}^2 - (U_{\text{зак}} - \mathcal{E})^2] \right\}^{1/2}.$$

Рассмотрим теперь состояние системы после вспышки неоновой лампы. Пусть U_m означает напряжение на конденсаторе в момент, когда ток равен нулю. Очевидно, после погашения лампы величина

$$\frac{1}{2} \frac{1}{C} (Q - \mathcal{E}C)^2 + \frac{1}{2} LI^2$$

снова должна быть постоянной. Следовательно,

$$\frac{1}{2C} (CU_{\text{гаш}} - C\mathcal{E})^2 + \frac{1}{2} LI'^2 = \frac{1}{2C} (CU_m - C\mathcal{E})^2.$$

Тогда

$$I' = \left\{ \frac{C}{L} [(U_m - \mathcal{E})^2 - (U_{\text{гаш}} - \mathcal{E})^2] \right\}^{1/2}.$$

При сравнении обоих выражений для I' (ток в катушке индуктивности не может измениться за очень малое время горения неоновой лампы) получаем

$$\mathcal{E}^2 - (U_{\text{зак}} - \mathcal{E})^2 = (U_m - \mathcal{E})^2 - (U_{\text{гаш}} - \mathcal{E})^2.$$

Из этого уравнения определим U_m . Очевидно, что уравнение имеет два решения, поскольку, когда лампа гаснет, система совершает гармонические колебания, которым при нулевом токе соответствуют максимальное и минимальное напряжения на конденсаторе:

$$U_m = \mathcal{E} \pm [\mathcal{E}^2 + (U_{\text{гаш}} - \mathcal{E})^2 - (U_{\text{зак}} - \mathcal{E})^2]^{1/2}.$$

Подставляя численные значения величин, находим

$$U_m = (34 \pm 20) \text{ В}.$$

Мы видим, что, когда неоновая лампа гаснет, напряжение на конденсаторе может изменяться от $34 \text{ В} - 20 \text{ В} = 14 \text{ В}$ до $34 \text{ В} + 20 \text{ В} = 54 \text{ В}$, т. е. оно ни

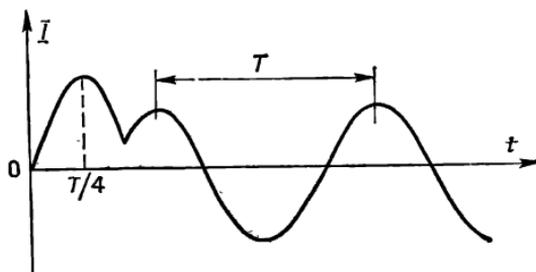


Рис. 85

разу не достигает значения, при котором лампа может вновь загореться. Вид функции $U(t)$ показан на рис. 84. Функция $I(t)$ представлена на рис. 85. Объяснить такой вид функции предоставим читателю.

3. Сначала рассмотрим случай, когда доска положена так, что ее центр тяжести находится в плоскости σ (рис. 86), равноудаленной от валиков. В этом случае давление на оба валика одинаково, а силы трения в точках соприкосновения равны по величине, но противоположно направлены, следовательно горизонтальная результирующая сил, действующих на доску, равна нулю, т. е. рассматриваемое положение является положением равновесия доски.

Предположим теперь, что центр тяжести доски смещен относительно плоскости σ на некоторое расстояние x . Определим вертикальные силы, действующие на валики со стороны доски:

$$P_1 + P_2 = mg \quad (\text{сумма сил } P_1 \text{ и } P_2 \text{ должна быть равна весу доски}),$$

$$P_1(l - x) - P_2(l + x) = 0 \quad (\text{сумма моментов сил } P_1 \text{ и } P_2 \text{ должна быть равна нулю; для удобства мы рассматриваем моменты относительно центра тяжести доски}).$$

Решая полученную систему уравнений, находим

$$P_1 = mg \frac{l + x}{2l},$$

$$P_2 = mg \frac{l - x}{2l}.$$

Доска все время скользит по валикам. Значит, силы T_1 и T_2 , действующие на доску, есть силы трения скольжения. Они равны произведению коэффициента

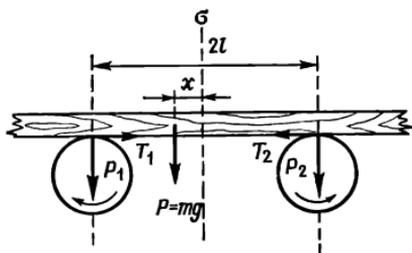


Рис. 86

трения f на давление валиков на доску, которые численно равны P_1 и P_2 (по третьему закону Ньютона), давление валиков на доску равно соответственно $-P_1$ и $-P_2$. Следовательно, имеем:

$$T_1 = fP_1 = fmg \frac{l + x}{2l},$$

$$T_2 = fP_2 = fmg \frac{l - x}{2l}.$$

В горизонтальном направлении на доску действует сила

$$F = T_2 - T_1 = -\frac{fmg}{l} x.$$

Эта сила направлена к плоскости σ и пропорциональна отклонению доски от положения равновесия, следовательно, доска будет совершать гармонические колебания. Ускорение доски в горизонтальном направлении равно

$$a = \frac{F}{M} = -\frac{fg}{l} x.$$

При гармоническом движении выполняется равенство

$$a = -\omega^2 x,$$

где $\omega = 2\pi/T$. Значит,

$$\frac{fg}{l} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.$$

Период колебаний доски равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{fg}}.$$

Важно отметить, что период не зависит от веса доски и угловых скоростей валиков. Угловые скорости валиков могут быть разными и даже меняться во времени. Важно лишь, чтобы направление вращения валиков было таким, как показано на рисунке, в противном случае не выполнялось бы условие изменения знака сил трения, как это имеет место в рассматриваемой задаче.

4. Система, рассматриваемая в задаче, является изолированной. Правда, на нее действуют внешние силы — сила тяжести и сила реакции стола, — но они взаимно уравновешивают друг друга. В горизонтальном направлении на систему не действуют никакие внешние силы, так как, согласно условию задачи, трением можно пренебречь.

Как известно, центр масс изолированной системы сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. Вначале, т. е. в момент освобождения натянутой пружины, центр масс покоился, следовательно, он будет покоиться до тех пор, пока ка-

кие-либо внешние силы не выведут его из этого состояния.

Поскольку центр масс остается неподвижным, удобнее рассматривать положение обоих тел относительно этой точки, как показано на рис. 87. Точка ЦМ на рисунке соответствует центру масс. Силы, действующие на тела, обозначены через \vec{F}_1 и \vec{F}_2 . Согласно

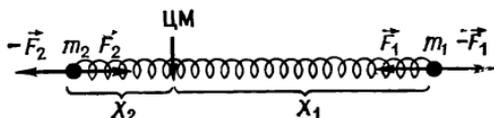


Рис. 87

Силы F_1 и F_2 приложены к массам.
Силы $-F_1$ и $-F_2$ приложены к пружине.

третьему закону Ньютона, на концы пружины действуют силы $-\vec{F}_1$ и $-\vec{F}_2$; результирующая их должна равняться нулю, поскольку в противном случае бесконечно легкая пружина должна получить бесконечно большое ускорение. Следовательно, имеем

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

Важно подчеркнуть, что это равенство связано с невесомостью пружины, а не является выводом из третьего закона Ньютона. Этот закон справедлив для двух взаимодействующих тел, а в нашем случае их больше, поскольку есть еще пружина. Но так как пружина невесома, ее можно не учитывать, а силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 трактовать как силы взаимодействия только двух тел, зависящие определенным образом от расстояния и подчиняющиеся третьему закону Ньютона.

Центр масс делит расстояние между телами в отношении, обратном их массам:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Если бы пружина не была натянута, то величины x_1 и x_2 имели бы значения x_{10} и x_{20} , определяемые уравнениями

$$\frac{x_{20}}{x_{10}} = \frac{m_1}{m_2},$$

$$x_{10} + x_{20} = l_0,$$

где l_0 — длина ненапрянутой пружины. Тогда

$$x_{10} = \frac{l_0}{1 + \frac{m_1}{m_2}}, \quad x_{20} = \frac{l_0}{1 + \frac{m_2}{m_1}}.$$

Обозначив отклонения тел от положения равновесия через Δx_1 и Δx_2 , получаем

$$\Delta x_1 = x_1 - x_{10} = x_1 - \frac{l_0}{1 + m_1/m_2},$$

$$\Delta x_2 = x_2 - x_{20} = x_2 - \frac{l_0}{1 + m_2/m_1}.$$

Силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 по модулю равны $k(x_1 + x_2 - l_0)$, что можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} F_1 &= k(x_1 + x_2 - l_0) = k \left[x_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) - l_0 \right] = \\ &= k \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \Delta x_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2 &= k(x_1 + x_2 - l_0) = k \left[x_2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) - l_0 \right] = \\ &= k \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \Delta x_2. \end{aligned}$$

Учитывая направления сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , можем записать уравнения второго закона динамики для каждого тела. Имеем

$$m_1 a_1 = -k \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \Delta x_1,$$

$$m_2 a_2 = -k \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \Delta x_2,$$

где a_1 и a_2 — ускорения масс m_1 и m_2 . Два независимых уравнения

$$a_1 = -k \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \Delta x_1,$$

$$a_2 = -k \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \Delta x_2$$

описывают гармонические колебания. При гармоническом движении ускорение тел a и отклонение тел от положения равновесия x связаны соотношением

$$a = -\omega^2 \Delta x,$$

где $\omega = 2\pi/T$ (T — период колебаний).

Пользуясь последним уравнением, нетрудно показать, что оба тела будут колебаться с одинаковым периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}},$$

где μ удовлетворяет равенству

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

Отмеченное выше равенство периодов колебаний обоих тел вполне понятно — в противном случае центр масс не мог бы находиться в состоянии покоя.

Период колебаний тела массой m , подвешенного на пружине с коэффициентом упругости k , равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Видим, что величина μ играет роль массы. Она называется приведенной массой системы двух тел. Каждое из рассматриваемых тел колеблется с таким же периодом, как колебалось бы тело массой μ , подвешенное на той же пружине с коэффициентом упругости k .

Поскольку начальные скорости обоих тел были равны нулю, то величины Δx_1 и Δx_2 изменяются по закону

$$\Delta x_1 = A \cos \frac{2\pi}{T} t,$$

$$\Delta x_2 = B \cos \frac{2\pi}{T} t;$$

Δx_1 и Δx_2 должны удовлетворять равенству

$$\frac{x_{10} + \Delta x_1}{x_{20} + \Delta x_2} = \frac{m_2}{m_1},$$

или

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{m_2}{m_1},$$

поскольку $m_1 x_{10} = m_2 x_{20}$. Отсюда вытекает, что постоянные коэффициенты A и B , описывающие начальное отклонение тел от положения равновесия, связаны соотношением

$$\frac{A}{B} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Следовательно, можно считать, что

$$A = C \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

$$B = C \frac{m_1}{m_1 + m_2},$$

где C — постоянная, зависящая от степени растяжения пружины перед началом движения.

Теперь определим зависимость x_1 и x_2 от времени:

$$x_1 = x_{10} + \Delta x_1 = \frac{m_2 l_0}{m_1 + m_2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} C \cos \frac{2\pi}{T} t,$$

$$x_2 = x_{20} + \Delta x_2 = \frac{m_1 l_0}{m_1 + m_2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} C \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

Расстояние между телами равно сумме $(x_1 + x_2)$, а, значит,

$$x = l_0 + C \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

Если начало системы связать с телом массой m_2 , то в такой неинерциальной системе полученная величина x описывала бы положение тела массой m_1 . Очевидно, что изменение этой координаты или движение тела массой m_1 относительно тела массой m_2 аналогично движению тела с приведенной массой μ под действием реальной силы, действующей между телами (т. е. без введения «фиктивных» сил инерции) в инерциальной системе, связанной, например, с центром масс. Введение приведенной массы упрощает решение, позволяя заменить рассмотрение двух независимых движений тел m_1 и m_2 относительно центра масс рассмотрением одного движения тела массой μ , совершаемого под действием реальной силы. Это утверждение справедливо для любой пары взаимодействующих тел.

5. Введем величину ξ , характеризующую отклонение грузика от положения равновесия:

$$\Delta x = \Delta x_0 + \xi.$$

На грузик действуют сила тяжести и сила упругости. Равнодействующая этих сил равна

$$\begin{aligned} F &= mg - k_1(\Delta x_0 + \xi) - k_2(\Delta x_0 + \xi)^3 = \\ &= mg - k_1 \Delta x_0 - k_2(\Delta x_0)^3 - \\ &\quad - [k_1 + 3k_2(\Delta x_0)^2] \xi - 3k_2 \Delta x_0 \xi^2 - k_2 \xi^3. \end{aligned}$$

Согласно условию задачи, нас интересует весьма малое отклонение ξ . Поэтому членами, содержащими ξ^2 и ξ^3 , можно пренебречь. Для состояния равновесия имеем

$$mg = k_1 \Delta x_0 + k_2 (\Delta x_0)^3,$$

значит, силу F можем записать в виде

$$F = - [k_1 + 3k_2 (\Delta x_0)^2] \xi.$$

Движение, совершаемое под действием такой силы, является гармоническим. Частота гармонических колебаний удовлетворяет условию $\omega^2 = -(F/m)$, период равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + 3k_2 (\Delta x_0)^2}},$$

где m — масса тела, которая явно не задана, но ее нетрудно определить из условия равновесия, рассмотренного выше. Имеем

$$m = \frac{k_1 \Delta x_0 + k_2 (\Delta x_0)^3}{g}.$$

Окончательно выражение для периода принимает вид

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{k_1 \Delta x_0 + k_2 (\Delta x_0)^3}{g [k_1 + 3k_2 (\Delta x_0)^2]}}.$$

Подставив в это выражение численные значения величин, получаем $T = 0,52$ с.

Определим зависимость периода от массы груза. Прежде всего отметим, что с увеличением массы Δx_0 возрастает (в состоянии равновесия).

Теперь найдем, каким образом период T зависит от Δx_0 . После несложных вычислений получим

$$\frac{dT}{d(\Delta x_0)} = \frac{\pi}{gT} \frac{k_1^2 + 3k_2^2 (\Delta x_0)^4}{[k_1 + 3k_2 (\Delta x_0)^2]^2} > 0.$$

Это означает, что T также возрастает с увеличением Δx_0 . А поскольку Δx_0 является возрастающей функцией массы, то и период также возрастает с увеличением массы.

В заключение рассмотрим величины k_1 и k_2 . Численное значение k_1 значительно меньше численного значения k_2 . Казалось бы, что в выражении для силы член, содержащий k_1 , можно опустить. Однако это не так. Читатель может легко убедиться, что если это сделать, то численное значение периода T будет суще-

ственно отличаться от полученного ранее. Величины k_1 и k_2 нельзя просто сравнивать, ибо они несопоставимы. Если перейти к другим единицам измерения, то численное значение k_1 может быть значительно большим численного значения k_2 .

Согласно условию задачи, требуется найти период малых колебаний грузика. Проанализируем, что это значит, воспользовавшись полным выражением для силы. Отбросим в нем члены $-3k_2\Delta x_0\xi^2$ и $-k_2\xi^3$, которые имеют ту же размерность, что и первый член, или $-[k_1 + 3k_2(\Delta x_0)^2]\xi$. Указанные члены отброшены не потому, что k_2 мало, а потому, что они содержат очень малые величины ξ^2 и ξ^3 , следовательно, они достаточно малы по сравнению с оставшимися членами и их влияние на конечный результат несущественно.

6. Согласно данным задачи, на тело, находящееся в точке A , отстоящей на расстоянии r от центра шара O , действует гравитационная сила только со стороны части шара M_1 (рис. 88). Незаштрихованная часть шара не оказывает воздействия на тело.

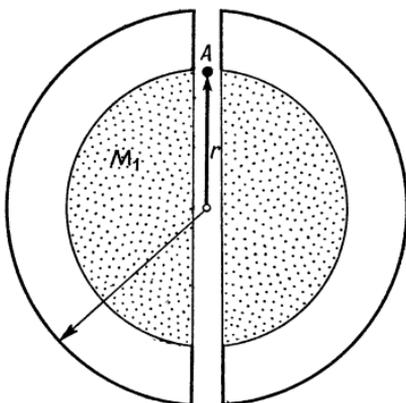


Рис. 88

Обозначим массу тела через m . Однородный шар массой M_1 воздействует на тело, находящееся вне его, так, как если бы он был материальной точкой с массой M_1 , помещенной в геометрический центр шара. То есть на тело, находящееся в точке A , действует сила

$$\vec{F} = -G \frac{mM_1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

где G — гравитационная постоянная. Знак минус означает, что сила \vec{F} направлена противоположно вектору \vec{r} . Так как в нашем случае мы рассматриваем Землю как однородный материальный шар, имеющий массу M и радиус R , то можем записать

$$\frac{M_1}{M} = \frac{r^3}{R^3}.$$

Это равенство выражает тот факт, что массы M_1 и M пропорциональны соответственно объему заштрихованной на рисунке части шара и объему Земли, которые, в свою очередь, пропорциональны кубам радиусов r и R . Отсюда получаем

$$M_1 = \frac{M}{R^3} r^3.$$

Подставим это выражение в уравнение силы, тогда

$$\vec{F} = -\frac{GmM}{R^3} \vec{r}.$$

Как видим, сила, действующая на тело в шахте, направлена к центру Земли и пропорциональна расстоянию от тела до центра Земли. Следовательно, тело будет совершать гармонические колебания относительно центра Земли. Определим период этих колебаний. Поскольку \vec{F} и \vec{r} направлены вдоль шахты, можно записать

$$F = -\frac{GmM}{R^3} r.$$

Тогда ускорение тела $a = F/m$ равно

$$a = -\frac{GM}{R^3} r,$$

но при гармоническом движении выполняется зависимость

$$a = -\omega^2 r = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r,$$

где T — период колебаний. Значит,

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{GM}{R^3}$$

и

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}.$$

Сравним этот период с периодом обращения вокруг Земли спутника, движущегося вблизи ее поверхности. Центробежная сила, определяющая траекторию спутника, — это сила гравитационного воздействия Земли. Следовательно, выполняется зависимость

$$\frac{mv^2}{R} = G \frac{mM}{R^2},$$

где m — масса спутника, R — радиус Земли и вместе с тем радиус орбиты спутника, v — скорость спутника, равная $2\pi R/T$, T — период обращения спутника вокруг Земли. После коротких преобразований получаем

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}.$$

Видим, что период обращения спутника и период колебаний тела в шахте одинаковы. Случаен ли этот результат или это следствие каких-то фундаментальных физических законов?

Да, полученный выше результат не случаен. К нему можно было бы прийти на основании закона независимости движения. Закон этот утверждает, что движение в данном направлении совершается только под действием той составляющей силы, которая направлена таким же образом, независимо от того, каковы остальные ее составляющие. Этот закон обусловлен векторным характером таких параметров, как сила, положение, ускорение, входящих во второй закон механики, тогда как масса является скалярной величиной.

Рассмотрим спутник, движущийся вблизи поверхности Земли (рис. 89). Сила гравитационного притяжения, действующая на спутник, равна

$$\vec{F}_{\text{гп}} = - \frac{GmM}{R^2} \frac{\vec{R}}{R}.$$

Будем считать, что эта сила имеет две составляющие: параллельную и перпендикулярную к шахте — и рассмотрим ее параллельную составляющую

$$F_{\parallel} = - \frac{GmM}{R^2} \cos \alpha = - \frac{GmM}{R^2} \frac{r}{R}.$$

Движение спутника в направлении, параллельном шахте, совершается только под действием этой силы. Ускорение этого движения, или проекция ускорения спутника на «ось» шахты, равно

$$a_{\parallel} = -\frac{GM}{R^3} r.$$

Видим, что проекция ускорения спутника на направление шахты и ускорение тела в шахте a выра-

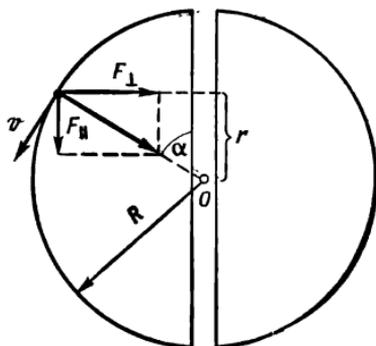


Рис. 89

жаются одинаковыми формулами. Обе эти формулы можно записать одним и тем же дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GM}{R^3} r,$$

поскольку

$$a = \frac{d^2 r}{dt^2} \quad \text{и} \quad a_{\parallel} = \frac{d^2 r}{dt^2}.$$

Это уравнение описывает как движение тела в шахте, так и проекцию движения спутника на ось шахты. Мы употребили здесь слово «описывает», а не «определяет», поскольку это уравнение не позволяет еще однозначно определить положение тела в любой момент времени $r(t)$, или, что то же самое, однозначно определить движение. Чтобы движение, т. е. функция $r(t)$, было определено, кроме самого уравнения необходимо знать еще и начальные условия, например положение и скорость тела в момент $t = 0$.

Согласно сказанному выше, если в начальный момент положение проекции спутника и положение тела

в шахте будут одинаковыми и если одинаковыми будут скорость тела в шахте и проекция скорости спутника на направление шахты, то из условия одинаковых уравнений движения зависимость $r(t)$ для обоих объектов будет одинакова.

Следовательно, если в начальный момент спутник будет пролетать над входом шахты, в которую в этот момент будет брошено тело с нулевой начальной скоростью, то положение тела и проекция спутника будут определяться одинаковыми функциями времени. Оба эти объекта будут двигаться одинаково и одновременно достигнут противоположного отверстия шахты. Очевидно, что период обоих движений будет одинаков. Отсюда явствует, что в момент, когда тело проходит через центр шахты, его скорость равна скорости спутника. Значит, чтобы тело достигло поверхности Земли, его скорость в центре шахты должна равняться первой космической скорости, или скорости спутника, летящего вблизи поверхности Земли. Эта скорость примерно равна 7,9 км/с.

Таким образом, практически без расчетов мы получили ответы на вопросы (б) и (в), поставленные в условии задачи. Ответ на вопрос (а) был получен ранее. Теперь попытаемся ответить на вопрос (г). Если бы направление шахты не совпадало с направлением оси вращения Земли, то на тело в шахте помимо гравитационной силы действовала бы еще сила инерции: центробежная сила и сила Кориолиса. Влияние центробежной силы читатель без труда может определить сам. Сила Кориолиса не изучается в школьной программе, поэтому мы не будем ее рассматривать.

До сих пор мы рассматривали шахту, проходящую через центр Земли. Теперь представим себе, что в неподвижной (чтобы не принимать во внимание силы инерции) однородной Земле пробита шахта так, как показано на рис. 90. Допустим, что движение тела в шахте происходит без трения. Интересно, что периоды движения тела в такой шахте и в шахте, проходящей через центр Земли, одинаковы. Доказательство этого факта не должно вызвать у читателя никаких затруднений. Итак, если бы мы построили туннель, соединяющий два пункта на поверхности Земли и пустили бы вагонетки, которые могли бы перемещаться в этом туннеле свободно и без трения, то время перемещения

вагонетки из одного пункта в другой было бы равно половине периода обращения спутника (около 45 мин). Интересный факт! Жаль, что нет технической возможности построить подобный туннель.

Покажем теперь, что сферическая однородная оболочка не притягивает тело, помещенное внутри нее.

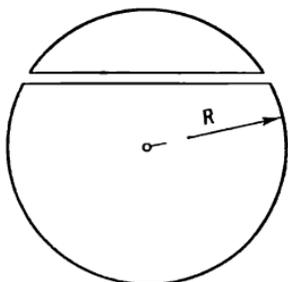


Рис. 90

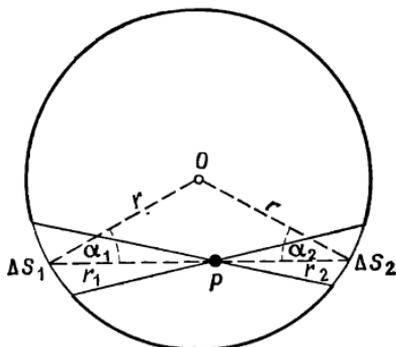


Рис. 91

На рис. 91 изображена такая сферическая материальная оболочка. Обозначенные здесь телесные углы с общими вершинами в точке P составляют $\Delta\Omega$ каждый. Расстояние точки P от поверхности, измеренное вдоль оси телесных углов, равно r_1 и r_2 . Имеем

$$\Delta S_1 = \frac{\Delta\Omega}{\cos \alpha_1} r_1^2$$

и

$$\Delta S_2 = \frac{\Delta\Omega}{\cos \alpha_2} r_2^2.$$

Массы элементарных поверхностей ΔS_1 и ΔS_2 равны

$$\Delta m_1 = \sigma \Delta S_1 \quad \text{и} \quad \Delta m_2 = \sigma \Delta S_2,$$

где σ — масса, приходящаяся на единицу поверхности. Если в точке P поместить точечную массу m , то массы Δm_1 и Δm_2 будут воздействовать на массу m с силами

$$\Delta F_1 = \frac{Gm\sigma \Delta S_1}{r_1^2}$$

и

$$\Delta F_2 = \frac{Gm\sigma \Delta S_2}{r_2^2},$$

где G — гравитационная постоянная.

Эти силы противоположно направлены, но равны по абсолютной величине: $\Delta S_1/r_1^2 = \Delta S_2/r_2^2$, так как $\alpha_1 = \alpha_2$.

Равнодействующая сил $\Delta \vec{F}_1$ и $\Delta \vec{F}_2$ равна нулю. Такое же рассуждение можно провести для каждой пары одинаковых малых телесных углов с общими вершинами в точке P . Отсюда следует, что полная сила, действующая на тело массой m , помещенное в точку P , равна нулю. Это относится, очевидно, и к любой точке внутри рассматриваемой шаровой поверхности. Следовательно, внутри однородной материальной шаровой поверхности гравитационное поле отсутствует.

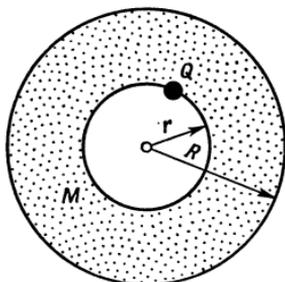


Рис. 92

Рассмотрим теперь точку Q , находящуюся на расстоянии r от центра однородного материального шара радиуса R ($r < R$) и массой M (рис. 92). Согласно сказанному выше, гравитационное поле от заштрихованной части шара равно нулю, поскольку эту часть можно считать системой концентрических материальных оболочек, а гравитационное воздействие каждой из таких оболочек равно нулю. Следовательно, на материальную точку, находящуюся в точке Q , действует гравитационная сила только со стороны незаштрихованной части шара. Таким образом, доказано предположение, сделанное в условии задачи. Нетрудно заметить, что наше доказательство имеет общий характер, и его можно применить не только в случае гравитационного взаимодействия, но и для других взаимодействий, убывающих пропорционально квадрату расстояния, например для электростатических взаимодействий. В случае электростатического взаимодействия это означает, что внутри равномерно заряженной шаровой поверхности нет электрического поля.

7. Обозначим коэффициент упругости пружины через k . Как известно,

$$k = \frac{F}{\Delta l},$$

где F — сила, растягивающая пружину, а Δl — удлинение пружины. В нашем случае

$$k = \frac{mg}{\Delta l}.$$

Вначале пружина с висящим на ней грузом находилась в состоянии равновесия. Длина пружины равнялась при этом $l + \Delta l$.

Что произойдет, если лифт начнет падать с ускорением $1/2g$? Тогда в системе, связанной с лифтом, любое тело получит дополнительное ускорение, равное $1/2g$ и направленное вверх. В связи с этим вес груза m в лифте будет равен не mg , а лишь $m(g - 1/2g) = 1/2mg$. Аналогичная ситуация будет и в случае, когда лифт замедляется с ускорением $1/2g$. При этом в системе, связанной с лифтом, каждое тело будет получать дополнительное ускорение, направленное вниз и равное $1/2g$, и эффективный вес груза массой m , находящегося в лифте, будет равен $m(g + 1/2g) = 3/2mg$.

Какую длину имела бы пружина в состоянии равновесия, если бы вместо силы mg ее растягивала сила $1/2mg$? Легко видеть, что ее длина была бы равна

$$l' = l + \Delta l',$$

где

$$\Delta l' = \frac{1/2mg}{k}.$$

Подставив k , получаем

$$\Delta l' = \frac{1}{2} \Delta l,$$

а значит,

$$l' = l + \frac{1}{2} \Delta l.$$

Аналогично в состоянии равновесия длина пружины, растягиваемой силой $3/2mg$, равна

$$l'' = l + \frac{3}{2} \Delta l.$$

Из приведенных рассуждений следует, что длина пружины в состоянии равновесия в различных фазах движения равна:

- в покоящемся лифте $l + \Delta l$,
- во время падения $l + \frac{1}{2}\Delta l$,
- при торможении $l + \frac{3}{2}\Delta l$,
- после остановки $l + \Delta l$.

Изменение положения равновесия в зависимости от времени показано на рис. 93.

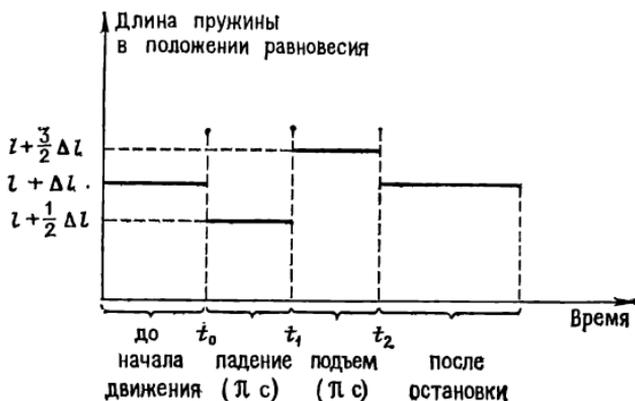


Рис. 93

Как видим, положение равновесия изменяется скачкообразно в начале падения, в начале торможения и при остановке.

Сначала рассмотрим момент, когда лифт начинает падать с ускорением $\frac{1}{2}g$. До начала падения груз находился в состоянии равновесия. Однако в первый момент падения это положение перестает быть положением равновесия — от нового положения равновесия груз теперь отдален на $\frac{1}{2}\Delta l$. Как известно, груз, подвешенный на пружине и отклоненный от положения равновесия, будет совершать гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

В рассматриваемом случае этот период равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{mg/\Delta l}} = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta l}{g}}.$$

Подставив численные значения Δl и g , получим

$$T = \frac{1}{5} \pi \quad (\text{секунд}).$$

В течение π с (это время падения лифта с ускорением $\frac{1}{2}g$) груз совершит 5 полных колебаний и вернется в то же положение относительно лифта, что и в начале движения. Его скорость относительно лифта будет при этом равна нулю.

Теперь рассмотрим торможение. В момент включения тормоза положение равновесия груза вновь изменяется скачком. Длина пружины до начала торможения равна $l + \Delta l$. В положении равновесия при торможении длина пружины должна равняться $l + \frac{3}{2}\Delta l$. В момент начала торможения груз отклонен от нового положения равновесия на $\frac{1}{2}\Delta l$. Он будет совершать колебания, аналогичные рассмотренным выше. Период колебаний зависит только от m и k и будет, очевидно, таким же, как прежде.

Сколько полных колебаний совершит груз? Поскольку при торможении ускорение имеет такую же абсолютную величину, что и ускорение падения, а начальная и конечная скорости лифта после всех изменений вновь становятся такими же, как вначале, следует, что время торможения также равно π с. Читатель может убедиться в этом самостоятельно, сделав несложный расчет. Следовательно, за время торможения груз совершит 5 колебаний и в момент окончания торможения будет находиться в том же положении, в котором был до начала движения лифта. Но по окончании торможения положение равновесия вновь скачком возвращается к тому же состоянию, что и в самом начале. Это значит, что по окончании торможения груз находится в том же самом положении равновесия, что и до начала падения. Его скорость относительно лифта будет, очевидно, равна нулю.

В моменты начала падения и торможения лифта скорость груза относительно лифта равна нулю, так как груз отстоит от положения равновесия на $\frac{1}{2}\Delta l$. Отсюда следует, что амплитуда колебаний груза одинакова как во время падения, так и во время торможения лифта и равна $\frac{1}{2}\Delta l$.

Описанные явления можно проиллюстрировать графиком. На рис. 94 показано, как изменяется длина пружины со временем.

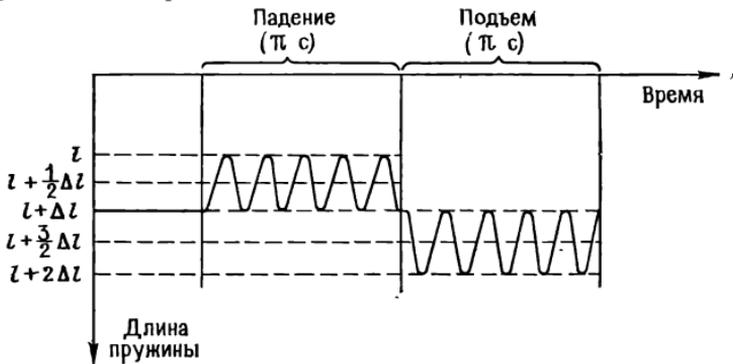


Рис. 94

А теперь посмотрим, что произойдет, если лифт будет падать с ускорением $1/2g$ в течение времени τ , отличного от π . Примем $\tau < \pi$ (рис. 95). Очевидно, при-

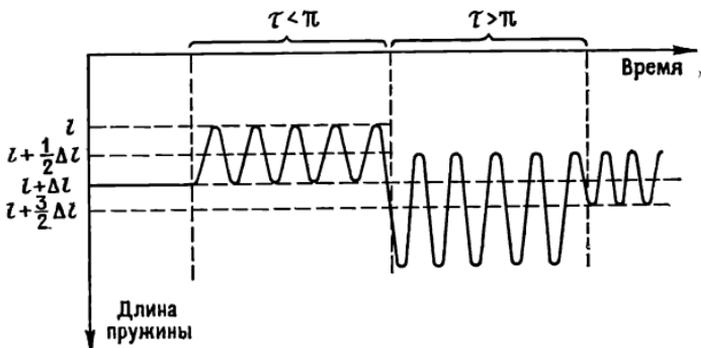


Рис. 95

веденный выше способ нахождения положения равновесия остается верным и для этого случая. Как и прежде, во время падения груз совершает колебания. Амплитуда этих колебаний будет равна $1/2\Delta l$, а период $\pi/5$ с. Однако теперь груз не совершит целого числа полных колебаний. В момент торможения груз будет отклонен от положения равновесия больше, чем на $1/2\Delta l$, и его скорость будет отлична от нуля. Поэтому во время торможения груз будет совершать колебания с амплитудой, большей $1/2\Delta l$. Но период этих колебаний будет, как и прежде, $\pi/5$ с. Торможение длит-

ся столько же, сколько и падение, и, следовательно, теперь груз совершит несколько меньше колебаний, чем прежде. В момент прекращения торможения пружина будет иметь длину, отличную от $l + \Delta l$, скорость груза относительно лифта будет отлична от нуля, и после окончания торможения груз будет совершать колебания около первоначального положения равновесия. Вычисление амплитуды конечных колебаний в зависимости от времени τ не существенно для понимания описанного явления.

8. Согласно примечанию к условию задачи, чтобы упростить сравнение движений с различными амплитудами, можно преобразовать каждое из них в движение с амплитудой, например, равной 1, вводя для каждого движения свою единицу длины, равную амплитуде колебаний: s — отклонение, A — амплитуда, $x = s/A$ — отклонение в новых единицах длины A .

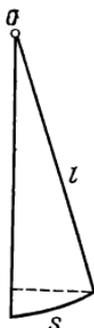


Рис. 96

Очевидно, скорость изменения величины x равна скорости изменения отклонения s , деленной на A . Обозначим эту скорость буквой u , тогда имеем

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{v}{A},$$

где

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Пусть длина маятника равна l (рис. 96). Из закона сохранения энергии следует

$$\frac{mv^2}{2} + mgl \left(1 - \cos \frac{s}{l}\right) = mgl \left(1 - \cos \frac{A}{l}\right),$$

или

$$v^2 = 2gl \left(\cos x \frac{A}{l} - \cos \frac{A}{l} \right),$$

Значит,

$$\begin{aligned} u^2 &= \frac{2gl}{A^2} \left(\cos x \frac{A}{l} - \cos \frac{A}{l} \right) = \\ &= 4gl \frac{\sin \frac{A}{2l} (1+x)}{A} \cdot \frac{\sin \frac{A}{2l} (1-x)}{A}. \end{aligned}$$

В результате замены переменных колебания разных амплитуд сводятся к движениям с амплитудой, численно равной 1. Сравнение периодов колебаний с разными A можно осуществить, сравнивая скорости u этих движений в соответствующих точках x . Если два движения происходят по одной и той же траектории, но скорость одного из них в каждой точке траектории больше, чем скорость другого в той же точке, то время, необходимое для прохождения одного и того же пути, меньше в случае первого движения. Очевидно, это условие является достаточным, но не необходимым. Однако условие $A_1 < A_2$ влечет за собой соотношение $u_1 > u_2$, а, значит, $T_1 < T_2$.

Чтобы доказать, что при $A_1 < A_2$ при одном и том же значении x $u_1 > u_2$, следует доказать монотонность функции $u(x, A)$ при возрастании A при любом, но постоянном x . Величина u^2 , согласно последнему уравнению, равна произведению двух функций вида $\sin aA/A$ с различными неотрицательными величинами a . Следует отметить, что функция $\sin aA/A$ монотонно убывает при возрастании A от нуля до максимального значения, равного π/l (значение A не превышает π). Монотонность функции $\sin aA/A$ равнозначна монотонности функции $\sin y/y$, отличающейся от первой постоянным дополнительным множителем; $\sin y/y$ также монотонно убывает при $0 < y \leq \pi$, ибо это есть отношение хорды к дуге.

9. Прежде всего следует определить момент инерции пластины относительно фактической оси вращения. Это можно сделать, воспользовавшись теоремой Штейнера, а также следующим образом. Представим себе пластину (рис. 97), массой $4M$ со стороны $2a$,

Согласно условию, момент инерции I' этой пластины относительно точки O равняется

$$I' = \frac{1}{6} 4M (2a)^2.$$

С другой стороны, момент инерции системы тел относительно заданной оси равен сумме моментов инерции этих тел относительно той же оси (аддитивность момента инерции). Следовательно,

$$I' = 4I,$$

где I — момент инерции пластины, имеющей массу M и сторону a , относительно оси, перпендикулярной к

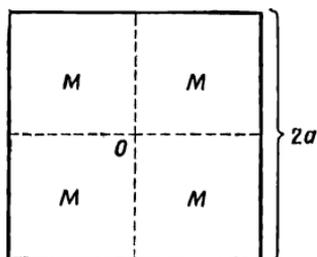


Рис. 97

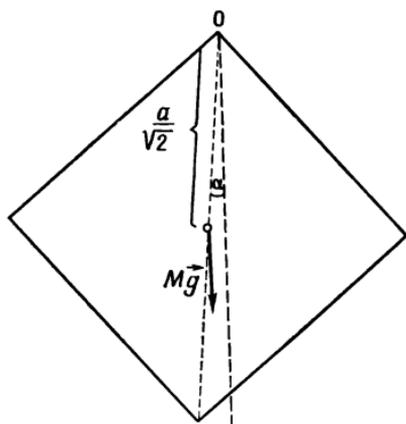


Рис. 98

плоскости пластины и проходящей через вершину квадрата. Используя сказанное выше, определим I :

$$I = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} 4M (2a)^2 = \frac{2}{3} Ma^2.$$

Запишем теперь уравнение движения нашего физического маятника. Угол отклонения диагонали, проходящей через ось вращения, от вертикали обозначим через α (рис. 98). Угловое ускорение пластины — через ε . Согласно второму закону механики, для вращательного движения справедливо соотношение

$$I\varepsilon = - Mg \frac{a}{\sqrt{2}} \sin \alpha.$$

Подставив в это соотношение значение I и учитывая, что $\varepsilon = d^2\alpha/dt^2$, получим уравнение, описывающее

движение нашего маятника (т. е. зависимость α от t):

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = - \frac{g}{\frac{2\sqrt{2}a}{3}} \sin \alpha. \quad (1)$$

Рассмотрим теперь математический маятник длиной l . Если не ограничиваться малыми колебаниями, то для математического маятника получим следующее уравнение движения:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = - \frac{g}{l} \sin \alpha. \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) будут идентичными, если положить $l = (2\sqrt{2}/3)a$. Идентичность уравнений означает, что при одинаковых начальных условиях (т. е. при одинаковых начальных отклонениях и скоростях) движение обоих маятников будет одинаковым.

Представим теперь пластину (физический маятник) и математический маятник длиной $l = (2\sqrt{2}/3)$ колеблющиеся вместе в одной плоскости относительно одной и той же оси. Если пластину и математический маятник отклонить от положения равновесия на один и тот же угол и отпустить, то зависимость $\alpha(t)$ для обоих маятников будет одинаковой. Конкретный вид функции $\alpha(t)$ не имеет для нас значения. Важно то, что конец математического маятника все время будет находиться возле одной и той же точки пластины. Если так, то можем его «приклеить» к пластине и движение при этом не изменится. Следовательно, прикрепление точечной массы m на диагонали на расстоянии, равном $2/3$ длины диагонали от оси вращения, не влияет на движение пластины; очевидно, что добавленная масса имеет нулевую скорость относительно пластины.

Особенностью приведенного решения является то, что оно в равной мере справедливо как для малых, так и для больших амплитуд колебаний.

10. Рассмотрим систему отсчета, связанную с тележкой. Это неинерциальная система, поскольку тележка скатывается по наклонной плоскости с определенным ускорением, которое нетрудно вычислить,— это

параллельная наклонной плоскости составляющая ускорения свободного падения (рис. 99)

$$a = g \cdot \sin \alpha.$$

Составляющую ускорения свободного падения, перпендикулярную к наклонной плоскости, обозначим через g' , которое равно

$$g' = g \cos \alpha.$$

В системе, связанной с тележкой, действуют два ускорения: ускорение свободного падения g , направленное вертикально вниз, и ускорение, обусловленное

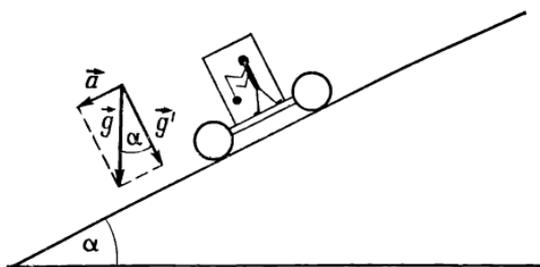


Рис. 99

неинерциальностью системы, которое равно $-\vec{a}$ и направлено параллельно плоскости (в сторону ее вершины). В результате для наблюдателя, находящегося на тележке, ускорение свободного падения равно

$$\vec{g} + (-\vec{a}).$$

Легко видеть, что это ускорение имеет величину, равную g' , и направлено перпендикулярно плоскости. Если бы наблюдатель на тележке находился в непрозрачной клетке, его наблюдения были бы такими же, как если бы он находился в поле силы тяжести с ускорением свободного падения g' , направленным к полу. В частности, маятник в состоянии равновесия был бы направлен к полу тележки, а значит, под углом 45° относительно вертикали наблюдателя, находящегося вне тележки и неподвижного относительно наклонной плоскости.

Как известно, период колебания математического маятника в поле земного тяготения, создающего уско-

рение свободного падения g , находится по формуле

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Согласно приведенным выше рассуждениям, чтобы определить период колебания математического маятника длиной l , движущегося вместе с тележкой, следует g заменить на g' . Получаем

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g'}}.$$

Величины T , T' и α связаны между собой соотношением

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \cos \alpha}} = \frac{T}{\sqrt{\cos \alpha}}.$$

Подставив численные значения T и α , получим

$$T' = 0,6 \text{ с.}$$

При решении задачи принималось, что отсутствует трение между тележкой и наклонной плоскостью. При наличии трения ускорение тележки было бы меньше a . Тогда результирующее ускорение в системе, связанной с тележкой, было бы направлено не перпендикулярно полу тележки, а несколько отклонено в направлении ее движения. Кроме того, величина ускорения была бы больше g' (хотя, конечно, меньше g), а период колебаний был бы заключен между T и T' .

При решении предполагается, что тележка движется прямолинейно и равноускоренно. В действительности так должен двигаться центр масс системы тележка + маятник, а не сама тележка. При колебаниях маятника центр масс рассматриваемой системы перемещается относительно тележки. Это означает, что тележка, вообще говоря, перемещается не совсем так, как мы принимаем. Однако важно отметить, что если маятник обладает значительно меньшей массой, чем тележка, то перемещением центра масс системы относительно тележки можно пренебречь.

По горизонтальной части траектории тележка движется с постоянной скоростью (при условии, что масса маятника значительно меньше массы тележки). Система, связанная с тележкой, становится инерциаль-

ной системой — в ней не действуют силы инерции, и период колебания маятника будет таким же, как и на неподвижной тележке.

«Полотер»

1. Рассмотрим точки A и B , лежащие симметрично относительно прямой σ , перпендикулярной к направлению скорости \vec{v} и проходящей через центр диска (рис. 100). Важно отметить, что скорости \vec{u}_A и \vec{u}_B точек A и B относительно стола имеют одинаковые го-

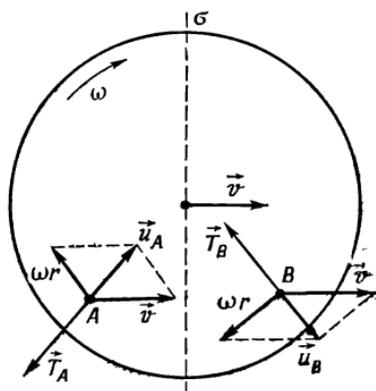


Рис. 100

ризонтальные составляющие, их вертикальные составляющие равны по величине и противоположны по направлению. Под «вертикальной» и «горизонтальной» составляющими мы понимаем здесь «параллельную» и «перпендикулярную» к прямой σ составляющие скорости. Значения сил трения \vec{T}_A и \vec{T}_B в точках A и B тоже одинаковы, независимо от того, постоянен ли коэффициент трения или он зависит от скорости. Направление силы трения противоположно направлению скорости точек тела относительно стола. Отсюда следует, что результирующая сил трения \vec{T}_A и \vec{T}_B направлена горизонтально, вертикальная составляющая сил трения равна нулю. Такое рассуждение справедливо для любой пары точек, симметричных относительно прямой σ . Следовательно, результирующая всех сил трения перпендикулярна к σ . Это означает, что диск

будет перемещаться в направлении, параллельном направлению скорости \vec{v} , которую диск приобрел в начале.

Следует подчеркнуть, что в каждой точке диска действует только одна сила трения, направленная противоположно скорости этой точки относительно стола. Некоторые учащиеся рассматривают в каждой точке диска две абсолютно независимые силы трения: одну, связанную с поступательным движением диска, другую — с вращательным. Очевидно, такой подход неверен. Проиллюстрируем это на примере. Пусть точка m движется со скоростью \vec{v} так, как показано на рис. 101. Сила трения \vec{T} действует на эту точку в на-



Рис. 101

правлении, противоположном направлению скорости \vec{v} , и численно равна fmg . Скорость \vec{v} можно представить в виде суммы двух скоростей \vec{v}_1 и \vec{v}_2 . Эти скорости могут иметь самые различные значения, но мы ограничимся рассмотрением случая, представленного на рисунке. Пусть скорость \vec{v}_1 велика, а \vec{v}_2 — мала. Движение тела со скоростью \vec{v} можно рассматривать как результат двух движений — со скоростью \vec{v}_1 и со скоростью \vec{v}_2 . Если бы в каждом из этих независимых движений действовали независимые силы трения \vec{T}_1 и \vec{T}_2 , направленные противоположно \vec{v}_1 и \vec{v}_2 соответственно и имеющие одинаковые численные значения fmg , то соотношение $\vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$ не выполнялось бы. Очевидно, силу \vec{T} можно разложить на составляющие \vec{T}_1 и \vec{T}_2 , параллельные соответственно

\vec{v}_1 и \vec{v}_2 , но силы \vec{T}_1 и \vec{T}_2 не независимы и не могут быть одновременно равны fmg , что ясно видно из рисунка.

Часто допускают и другую ошибку, рассматривая раздельно собственно поступательное движение и собственно вращательное движение диска и предполагая, что результаты будут справедливы и для диска, совершающего оба движения одновременно. Подобный подход неверен. Он справедлив для двух крайних случаев ($\omega = 0$ или $v = 0$), но не для общего случая ($\omega \neq 0$, $v \neq 0$). Ошибочность такого подхода можно показать на другом примере, а именно на явлении Магнуса. Оно заключается в том, что если валик, находящийся в неподвижной жидкости или газе, вращается вокруг оси симметрии со скоростью ω и одновременно движется со скоростью \vec{v} в направлении, перпендикулярном оси, то действующая на него сила перпендикулярна к оси вращения и к \vec{v} . В частности, когда $\omega = 0$ или $v = 0$, эта сила равна нулю. Но утверждение, что сила, направленная перпендикулярно оси вращения, всегда равна нулю, ошибочно.

2. Мгновенная ось вращения проходит через точку S , отстоящую от центра диска на расстоянии $d =$

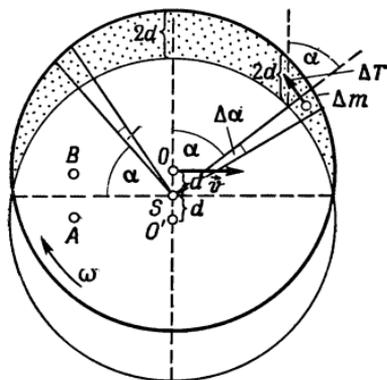


Рис. 102

$= v/\omega$ (рис. 102). Проведем через точку S линию, параллельную \vec{v} , и построим зеркальное отражение нижней части диска относительно этой прямой. Важно отметить, что сумма сил трения в произвольных точках

A и B , симметричных относительно рассматриваемой прямой, не имеет составляющей, параллельной \vec{v} . Следовательно, сила торможения зависит только от узкого «серпа» (на рисунке отмечен точками), образованного двумя окружностями с центрами в точках O и O' , отстоящих на $2d$. Определим эти силы. Рассмотрим элемент серпа массой Δm , лежащий справа от прямой, проходящей через O и O' . Имеем

$$\Delta T = f g \Delta m = f g \frac{m}{\pi r^2} \Delta S,$$

где ΔS — площадь рассматриваемого элемента. Но

$$\Delta S = r \Delta \alpha 2 d \cos \alpha.$$

Следовательно,

$$\Delta T = \frac{2}{\pi} f g m \frac{v}{\omega r} \cos \alpha \Delta \alpha.$$

Составляющая этой силы, параллельная \vec{v} , равна

$$\Delta T' = \frac{2}{\pi} f m g \frac{v}{\omega r} \cos^2 \alpha \Delta \alpha.$$

Параллельная \vec{v} составляющая силы трения, действующей на выделенный сектор, лежащий на 90° влево от сектора, который мы рассматривали ранее, равна

$$\Delta T'' = \frac{2}{\pi} f m g \frac{v}{\omega r} \sin^2 \alpha \Delta \alpha.$$

Сумма составляющих $\Delta T'$ и $\Delta T''$ равняется

$$\Delta T_{\parallel} = \frac{2}{\pi} f m g \frac{v}{\omega r} \Delta \alpha.$$

Видим, что ΔT_{\parallel} пропорциональна $\Delta \alpha$. Принимая угол $\Delta \alpha$ равным четверти полного угла ($\pi/2$), получим выражение для силы, тормозящей поступательное движение шайбы:

$$F = f m g \frac{v}{\omega r}.$$

Эта задача представляет собой «теорию» полотера. Каждый читатель имел дело с электрическим полотером и замечал, что в выключенном состоянии поло-

тер довольно трудно перемещать по полу, тогда как после включения перемещать его становится намного легче. Это объясняется тем, что сила, тормозящая движение полотера, пропорциональна $v/\omega r$, а для включенного полотера эта величина очень невелика.

3. Скорость точки A с угловой координатой α (рис. 103), отсчитываемой относительно неподвижного стола, имеет две составляющие: $u_{\parallel} = v + \omega r \cos \alpha$

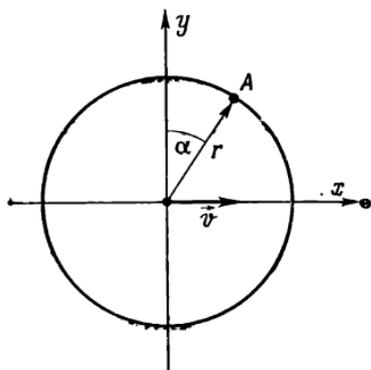


Рис. 103

(составляющая, параллельная \vec{v}) и $u_{\perp} = \omega r \sin \alpha$ (составляющая, перпендикулярная \vec{v}).

Согласно условию задачи, в начальный момент $v = \omega r$, следовательно, можно записать

$$u_{\parallel} = 2\omega r \cos^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$u_{\perp} = 2\omega r \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Абсолютная величина скорости \vec{u} равна

$$u = \sqrt{u_{\parallel}^2 + u_{\perp}^2} = 2\omega r \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|.$$

В каждой точке кольца действует сила, направленная противоположно скорости \vec{u} этой точки относительно стола. Сила трения, действующая на элемент кольца, заключенный между α и $\alpha + d\alpha$, имеет две

составляющие, численно равные

$$dT_{\parallel} = fg \, dm \frac{u_{\parallel}}{u},$$

$$dT_{\perp} = fg \, dm \frac{u_{\perp}}{u},$$

где $dm = \rho d\alpha$, ρ — «угловая плотность» кольца, т. е. масса кольца, приходящаяся на единичный угол α . Масса всего кольца определяется формулой

$$2\pi\rho = m,$$

значит,

$$\rho = \frac{m}{2\pi}$$

и

$$dm = \frac{m}{2\pi} d\alpha.$$

Определим T_{\parallel} . Для этого нужно проинтегрировать dT_{\parallel} по углу α от 0 до 2π . Имеем

$$T_{\parallel} = \int_0^{2\pi} fg \frac{m}{2\pi} d\alpha \frac{2\omega r \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2\omega r \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|} =$$

$$= 2 \int_0^{\pi} fg \frac{m}{2\pi} \cos \frac{\alpha}{2} d\alpha = \frac{2}{\pi} fmg.$$

Составляющая $T_{\perp} = 0$, что можно доказать методом, использованным в первой задаче этого раздела. Таким образом, сила, тормозящая поступательное движение кольца, равна

$$F = T_{\parallel} = \frac{2}{\pi} fmg.$$

Момент сил, тормозящий вращательное движение кольца, лучше всего отсчитывать относительно центра кольца, но можно и относительно других точек, например относительно мгновенной оси вращения; важно лишь правильно понимать, относительно какой точки он отсчитывается. Плечи для сил $d\vec{T}_{\parallel}$ и $d\vec{T}_{\perp}$ в точке A относительно центра кольца соответственно равны

$$R_1 = r \cos \sigma \quad \text{и} \quad R_2 = r \sin \alpha.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 dM &= R_1 dT_{\parallel} + R_2 dT_{\perp} = \\
 &= r \cos \alpha f g \frac{m}{2\pi} \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|} d\alpha + \\
 &+ r \sin \alpha f g \frac{m}{2\pi} \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|} d\alpha = \\
 &= r f g \frac{m}{2\pi} \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|} \left(\cos \alpha \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \right) d\alpha = \\
 &= r f g \frac{m}{2\pi} \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|} d\alpha.
 \end{aligned}$$

Момент торможения находим, интегрируя dM по углу α от 0 до 2π . Получаем при этом тот же интеграл, что и прежде, но с дополнительным множителем r :

$$M = \int_0^{2\pi} dM = r \frac{2}{\pi} f m g.$$

Заметим, что F и M удовлетворяют уравнению

$$M = Fr.$$

Учитывая, что момент инерции кольца $I = mr^2$, можно утверждать, что соотношение $v = \omega r$, приведенное вначале, выполняется все время. Это означает, что мгновенная ось вращения всегда проходит через край кольца. Она будет перемещаться прямолинейно параллельно центру кольца O . Определить продолжительность движения кольца предоставляем читателю.

Отражение и преломление

1. Эту задачу целесообразнее решать в системе, вращающейся вместе с диском. В этой системе на каждую точку поверхности ртути действует составляющая силы тяжести и центробежной силы. Как из-

вестно, свободная поверхность ртути в состоянии равновесия перпендикулярна равнодействующей указанных сил, действующих на нее. Это означает, что равнодействующая сил тяжести и центробежной силы, действующих на данную точку поверхности ртути, должна быть перпендикулярна к плоскости, касательной к поверхности в данной точке. На рис. 104 показано сечение системы плоскостью, проходящей через

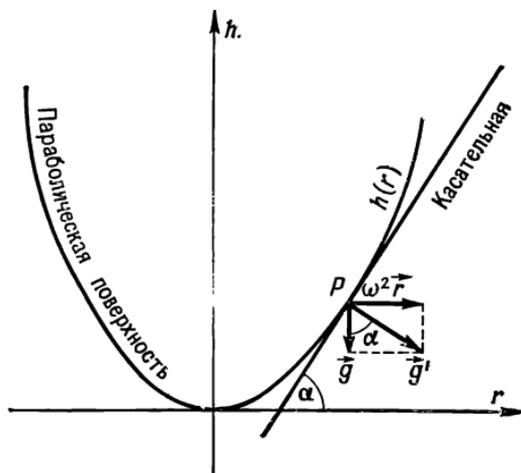


Рис. 104

ось вращения и рассматриваемую точку на поверхности ртути. Из соображений симметрии ясно, что достаточно рассмотреть лишь одно такое сечение.

Определим вид линии, получившейся при пересечении поверхности ртути плоскостью, проходящей через ось вращения. Вместо понятия центробежной силы и силы тяжести можно воспользоваться понятиями центробежного ускорения и ускорения свободного падения. Результирующая этих ускорений g' лежит в плоскости сечения и должна быть перпендикулярна к кривой, представляющей поверхность ртути. Рассмотрим точку P , лежащую на поверхности ртути на расстоянии r от оси вращения h . В этой точке действует горизонтально направленное центробежное ускорение, равное $\omega^2 r$, а также вертикально направленное ускорение свободного падения g . Углы, обозначенные α , равны между собой как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Из рисунка видно, что тангенс

угла наклона касательной к кривой в точке P равен $\omega^2 r/g$, но в то же время тангенс угла наклона касательной равен производной функции, описывающей кривую, следовательно, имеем

$$\frac{d}{dr} h(r) = \frac{\omega^2}{g} r.$$

Известно, что если производная какой-либо функции является линейной функцией, то сама функция должна быть многочленом второго порядка. Нетрудно доказать, что записанное уравнение является производной функции

$$h(r) = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + C,$$

где C — некая постоянная; она равна значению функции в точке $r = 0$. Если начало системы координат выберем так, как показано на рисунке, то при $r = 0$ C будет равно нулю и функция $h(r)$ будет иметь вид

$$h(r) = \frac{\omega^2}{2g} r^2.$$

Следовательно, сечение поверхности ртути плоскостью, проходящей через ось вращения, представляет собой параболу, а сама поверхность ртути является параболоидом вращения.

Перейдем теперь к оптической части задачи. Имеется парабола $h(r) = (\omega^2/2g)r^2$; требуется определить точку, в которой соберется пучок лучей, падающих на поверхность параболоида вращения параллельно оси вращения — оси симметрии (рис. 105). Рассмотрим луч, падающий на параболу в точке P , отстоящей на расстоянии r_0 от оси h . Пусть после отражения этот луч пересекает ось симметрии в точке F . Углы QPS и SPF равны в силу закона отражения. Углы QPS и PTV равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Следовательно, угол FPR равен $90^\circ - 2\alpha$, где α — угол наклона касательной в точке $r = r_0$, тангенс которого равен $(\omega^2/g)r_0$. Расстояние f точки F от вершины параболы O равно $h_0 + h_1$. Тогда

$$f = h_0 + h_1 = \frac{\omega^2}{2g} r_0^2 + r_0 \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{g}{2\omega^2},$$

откуда

$$f = \frac{g}{2\omega^2}.$$

Видим, что расстояние точки F от точки O не зависит от r_0 . Это означает, что все лучи; независимо от того, на каком расстоянии от оси находились точки их падения на параболу, после отражения пересекут ось симметрии в точке F , отстоящей на $f = g/2\omega^2$ от вершины параболы. Следовательно, точка F является фокусом рассматриваемого зеркала. Величину f назовем фокусным расстоянием.

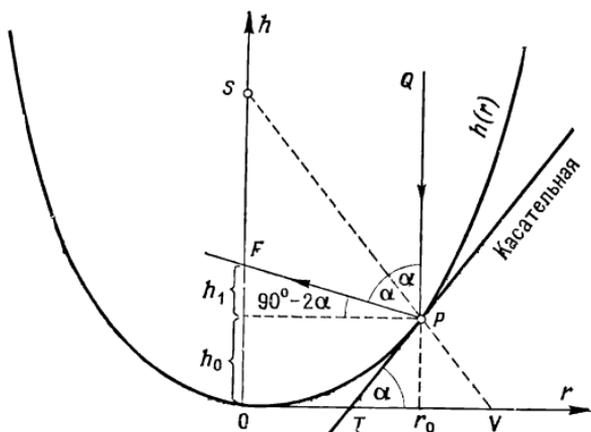


Рис. 105

В рассмотренном решении нет никаких приближений. Сделанные выводы абсолютно точны. И этим, собственно, параболическое зеркало отличается от сферического, для которого фокус (в точном значении этого слова) существует лишь для лучей, падающих вблизи оптической оси. В отличие от сферического параболическое зеркало не имеет сферической аберрации.

Положение фокуса можно определить еще одним способом. Предположим, что все лучи после отражения пересекаются в одной точке F , лежащей на оптической оси (рис. 106). Воспользуемся законом обратимости хода лучей и поместим в точку F точечный источник света. Источник этот испускает сферические волны, которые после отражения от поверхности дол-

жны стать плоскими волнами. Фронт плоской волны, т. е. поверхность постоянной фазы, образует плоскость, перпендикулярную к направлению движения волны. Отсюда следует, что оптический путь различных лучей, приходящих в точку плоскости A после отражения, должен быть одинаковым. В противном случае разные лучи доходили бы до этой плоскости в

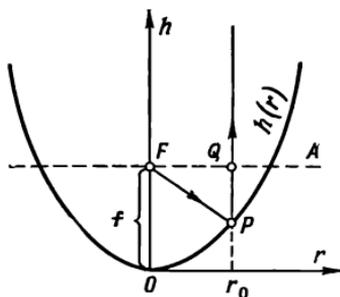


Рис. 106

разных фазах, т. е. после отражения не было бы плоской волны. Рассмотрим пути FOF и FPQ :

$$2f = \sqrt{r_0^2 + [f - h(r_0)]^2} + [f - h(r_0)].$$

После несложных преобразований получаем

$$h(r_0) = \frac{1}{4f} r_0^2.$$

Поскольку r_0 произвольно, то

$$h(r) = \frac{1}{4f} r^2.$$

Приравнивая полученное уравнение отражающей поверхности к уравнению, найденному ранее при механическом решении задачи, убеждаемся, что

$$\frac{1}{4f} = \frac{\omega^2}{2g},$$

а, значит,

$$f = \frac{g}{2\omega^2}.$$

Отсутствие сферической аберрации у параболического зеркала используется практически, например, в прожекторах и зеркальных телескопах. В прожекто-

рах источник света помещается вблизи фокуса параболического зеркала, благодаря чему свет выходит из прожектора в виде точно направленного параллельного пучка. В зеркальных телескопах с параболическим зеркалом свет, приходящий от звезд, собирается в фокусе независимо от размеров зеркала. Таким образом, увеличивая диаметр зеркала, можно повысить четкость и яркость изображения. Один из способов получения параболических зеркал для телескопов заключается в следующем: сосуд, имеющий форму параболоида, наполняется ртутью и раскручивается до определенной угловой скорости, при которой ртуть равномерно растекается по стенкам сосуда, образуя параболоид вращения и выравнивая неровности сосуда. Этот способ применяется редко, потому что полученное таким образом зеркало очень чувствительно к малейшим сотрясениям.

2. Если линза может собирать плоский фронт волны без аберрации, то фронт волны за линзой должен

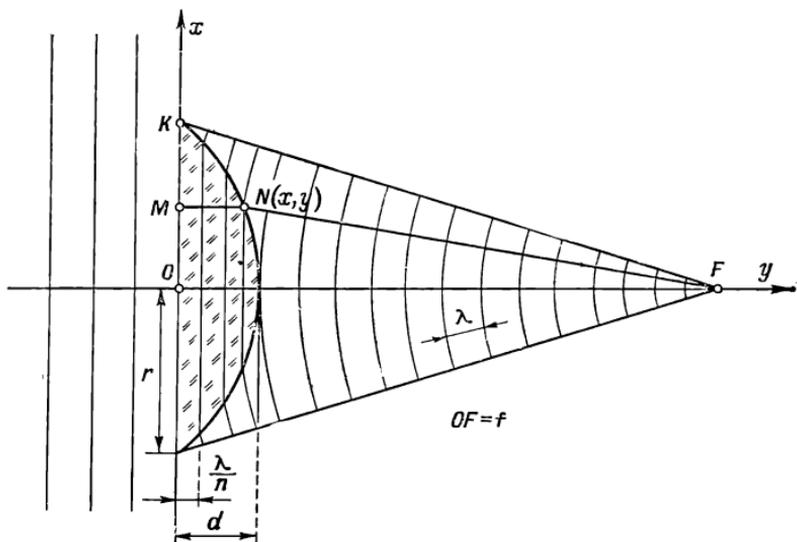


Рис. 107

иметь форму сферической поверхности с общим центром в фокусе F (рис. 107). Фронт падающей волны параллелен плоской поверхности линзы. Внутри линзы фронт волны также параллелен плоскости линзы. Поскольку длина волны в стекле короче, чем в воз-

духе, расстояние между максимумами волн в стекле равно λ/n , где λ — длина волны в вакууме. Как видно из рисунка (и это следует из самой сущности волнового процесса), число максимумов волн, помещающихся между фокусом и плоской стороной линзы, постоянно и не зависит от направления, в котором мы их считаем. Определим число максимумов вдоль трех направлений: OF , MNF и KF — и сравним полученные результаты. Обозначим координаты точки N через x и y , как показано на рисунке:

а) число максимумов вдоль пути OF

$$\frac{d}{\lambda/n} + \frac{f-d}{\lambda};$$

б) число максимумов вдоль MNF

$$\frac{y}{\lambda/n} + \frac{\sqrt{x^2 + (f-y)^2}}{\lambda};$$

в) число максимумов волн вдоль пути KF

$$\frac{\sqrt{r^2 + f^2}}{\lambda}.$$

Поскольку полученные значения должны быть равны между собой, то, приравняв, например, первое и третье из них, находим

$$\frac{nd}{\lambda} + \frac{f-d}{\lambda} = \frac{\sqrt{r^2 + f^2}}{\lambda}.$$

Следовательно, независимо от длины волны λ

$$d = \frac{\sqrt{r^2 + f^2} - f}{n-1} = 2 \text{ см.}$$

Чтобы найти уравнение, описывающее форму линзы, приравняем второе и третье из полученных выше значений числа максимумов:

$$ny + \sqrt{x^2 + (f-y)^2} = \sqrt{r^2 + f^2}. \quad (1)$$

Это уравнение можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned} (n^2 - 1) \left[y - \frac{n\sqrt{r^2 + f^2} - f}{n^2 - 1} \right]^2 - x^2 = \\ = \frac{(n^2 + 1)f^2 + r^2 - 2nf\sqrt{r^2 + f^2}}{n^2 - 1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Мы получили уравнение гиперболы. Это уравнение описывает две ветви гиперболы, тогда как уравнение (1) описывает только одну из них. Очевидно, это связано с необратимостью перехода от уравнения (1) к уравнению (2). Из двух ветвей гиперболы, описываемой уравнением (2), рассматриваемой ситуации соответствует та, которая пересекает прямую $y = 0$. Следовательно, линза имеет вид одной из частей двухполостного гиперболоида вращения.

Очевидно, сравнивать числа максимумов волн вдоль всех трех направлений было излишне. Можно было ограничиться путями MNF и KF , чтобы определить уравнение, описывающее линзу; из него же в свою очередь легко определить y как координату точки, для которой $x = 0$. Однако выбранный нами путь позволил определить d , не находя предварительно уравнения формы линзы.

Теперь решим эту задачу иным путем, воспользовавшись законом преломления Снелла. Введя обозна-

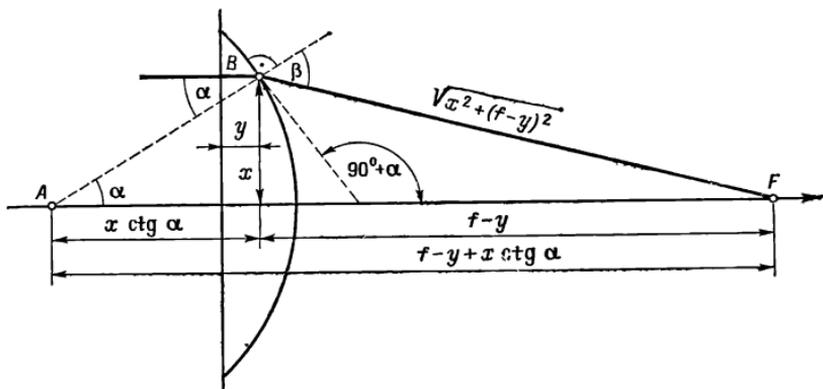


Рис. 108

чения, показанные на рис. 108, из закона Снелла для треугольника ABF имеем

$$\frac{\sqrt{x^2 + (f-y)^2}}{\sin \alpha} = \frac{f-y + \text{ctg } \alpha}{\sin (180^\circ - \beta)}.$$

Тангенс угла наклона касательной к изображенной кривой равен производной функции, описывающей кривую, в точке касания. Поскольку угол наклона касательной к оптической оси равен $(90^\circ + \alpha)$,

$$\text{tg } (90^\circ + \alpha) = \frac{dx}{dy} = -\text{ctg } \alpha.$$

Учитывая эту зависимость, предыдущее уравнение можно записать в виде

$$\frac{x \frac{dx}{dy} - (f - y)}{\sqrt{x^2 + (f - y)^2}} = - \frac{\sin \beta}{\sin \alpha},$$

но $\sin \beta / \sin \alpha = n$, следовательно,

$$\frac{x \frac{dx}{dy} - (f - y)}{\sqrt{x^2 + (f - y)^2}} = - n.$$

Это дифференциальное уравнение выражает тот факт, что каждый луч из параллельного пучка после преломления на кривой поверхности линзы пройдет через одну и ту же точку F . Попробуем из этого уравнения найти зависимость $x(y)$. Заметим, что левая часть уравнения является производной по y выражения

$$\sqrt{[x(y)]^2 + (f - y)^2}.$$

Отсюда можем записать

$$\frac{d}{dy} \sqrt{[x(y)]^2 + (f - y)^2} = - n.$$

Следовательно,

$$\sqrt{x^2 + (f - y)^2} = - ny + C,$$

где C — постоянная. Эту постоянную определим из условия, что кривая, описывающая форму линзы, проходит через точки $x = r$ и $y = 0$:

$$C = \sqrt{r^2 + f^2}.$$

Тогда предыдущее уравнение можно записать как

$$\sqrt{x^2 + (f - y)^2} = - ny + \sqrt{r^2 + f^2}.$$

Это уравнение идентично уравнению (1). Как видим, последний способ решения с использованием закона Снелла оказался труднее, чем способ, основанный на волновой теории.

3. Введем обозначения согласно рис. 109. Если бы не было воды, то после отражения луч проходил бы через точку F , отстоящую от центра зеркала на $R/2$.

Имеем

$$\frac{a}{R/2} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{a}{f} = \operatorname{tg} \beta.$$

При малых углах α и β (параллельный пучок идет

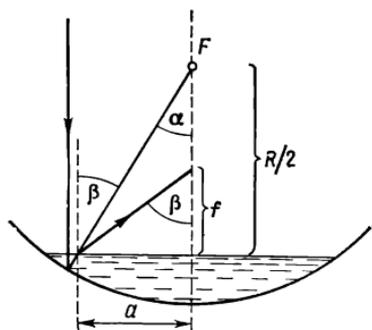


Рис. 109

вблизи оси) тангенсы практически равны синусам. Следовательно,

$$\frac{2a}{R} = \sin \alpha, \quad \frac{a}{f} = \sin \beta.$$

Значит,

$$n = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{R}{2f}.$$

Отсюда

$$f = \frac{R}{2n}.$$

В численном выражении $f = 60 \text{ см} : (2 \cdot 4/3) = 22,5 \text{ см}$.

4. Фокусное расстояние линзы, находящейся в какой-то среде, не зависит от того, на какую из сторон линзы падает параллельный пучок лучей. Если же с разных сторон линзы находятся различные среды, то фокусные расстояния тонкой линзы для лучей, падающих с разных сторон, различны.

Введем обозначения, как показано на рис. 110. Фокусное расстояние со стороны предмета обозначим $f_{\text{п}}$, а со стороны изображения — $f_{\text{из}}$. Высота предмета и изображения соответственно $h_{\text{п}}$ и $h_{\text{из}}$. x и y — расстояние предмета и изображения от линзы.

Теперь запишем уравнения линзы, связывающие x , y , $f_{\text{п}}$ и $f_{\text{из}}$. Построение изображения показано на

рис. 110. Луч из точки B , идущий параллельно оптической оси линзы, проходит через фокус $F_{из}$. Луч из B , проходящий через фокус $F_{п}$, после прохождения через линзу будет параллелен оптической оси. Оба

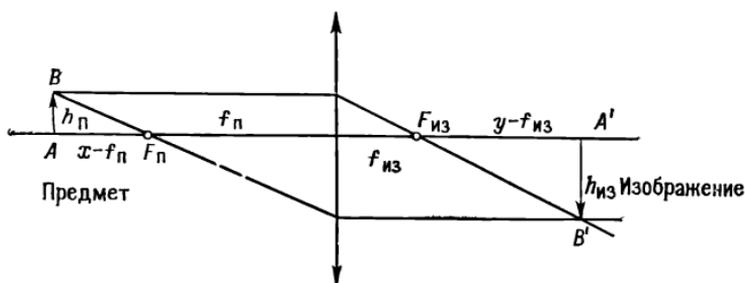


Рис. 110

эти луча пересекаются за линзой в точке B' . Из подобия треугольников имеем

$$\frac{h_{п}}{x - f_{п}} = \frac{h_{из}}{f_{п}}, \quad \frac{h_{п}}{f_{из}} = \frac{h_{из}}{y - f_{из}}.$$

Разделив эти уравнения друг на друга, получаем

$$\frac{f_{из}}{x - f_{п}} = \frac{y - f_{из}}{f_{п}}.$$

Это уравнение после несложных алгебраических преобразований можно представить в виде

$$\frac{f_{п}}{x} + \frac{f_{из}}{y} = 1.$$

Определим теперь увеличение изображения ω . Воспользовавшись установленной зависимостью, можно записать

$$\omega = \frac{h_{из}}{h_{п}} = \frac{y - f_{из}}{f_{п}} = \frac{1 - \frac{f_{из}}{y}}{\frac{f_{п}}{y}} = \frac{\frac{f_{п}}{x}}{\frac{f_{п}}{y}} = \frac{y}{x} \frac{f_{п}}{f_{из}}.$$

Отсюда видно, что, зная фокусные расстояния линзы, можно исследовать положение изображения в зависимости от положения предмета, а также проанализировать увеличение при различных положениях предмета.

Определим фокусные расстояния линзы, приклеенной к стенке аквариума: $f_{из}$ и $f_{п}$.

Сначала рассмотрим случай, когда линза приклеена к внешней стороне стенки аквариума (рис. 111). Параллельный пучок лучей, идущих со стороны воды, при переходе из воды в стекло не изменяется и, пройдя линзу, собирается на расстоянии f . Следовательно, $f_{из} = f$.

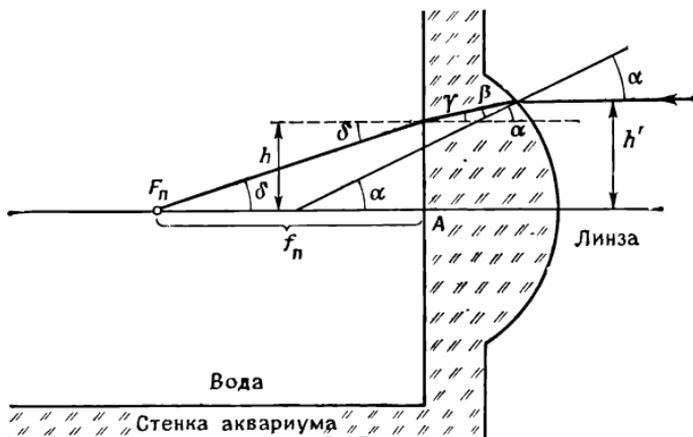


Рис. 111

Теперь определим f_n для пучка, проходящего вблизи оси линзы, при условии, что линза тонкая. При этом можно ограничиться малыми значениями углов α , β , γ и δ . Из теоремы о сумме углов треугольника имеем

$$\alpha = \beta + \gamma.$$

Закон преломления дает зависимости (n стекла обозначим $n_{ст}$, а n воды — $n_в$)

$$n_{ст} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \approx \frac{\alpha}{\beta}; \quad \frac{n_{ст}}{n_в} = \frac{\sin \delta}{\sin \gamma} \approx \frac{\delta}{\gamma}.$$

Кроме того, $\sin \alpha = h/R \approx \alpha$, а $\text{tg } \delta = h/f_n \approx \delta$, где R — радиус кривизны линзы. Поскольку толщина линзы мала, т. е. $h \approx h'$, имеем

$$\begin{aligned} f_n &\approx \frac{h}{\delta} \approx \frac{h}{\gamma n_{ст}/n_в} = \frac{h n_в}{n_{ст} (\alpha - \beta)} = \\ &= \frac{R n_в}{n_{ст} (\alpha - \alpha/n_{ст})} = n_в \frac{R}{n_{ст} - 1} = n_в f. \end{aligned}$$

Учитывая полученные результаты, уравнение линзы можно записать в виде

$$\frac{n_{\text{в}}}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f},$$

а формула для увеличения принимает вид

$$\omega = n_{\text{в}} \frac{y}{x}.$$

Введя новую переменную $x' = x/n_{\text{в}}$, можно записать эти формулы следующим образом:

$$\frac{1}{x'} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}, \quad \omega = \frac{y}{x'}.$$

Формально мы получили те же формулы, что и для линзы в воздухе, лишь вместо x здесь фигурирует x' . Следовательно, можно воспользоваться хорошо известными уравнениями линзы в воздухе:

$$\text{а) } x' > 2f \quad \left(x > 2fn_{\text{в}} = \frac{8}{3}f \right)$$

изображение действительное, уменьшенное, перевернутое, находится на расстоянии y , удовлетворяющем неравенству $2f > y > f$,

$$\text{б) } 2f > x' > f \quad \left(\frac{8}{3}f > x > \frac{4}{3}f \right)$$

изображение действительное, увеличенное, перевернутое, находится на расстоянии $y > 2f$,

$$\text{в) } f > x' \quad \left(\frac{4}{3}f > x \right)$$

изображение мнимое, прямое, увеличенное, расположено по ту же сторону линзы, что и предмет. Для $x = f$ имеет место случай (в): $x' = f/n_{\text{в}} < f$, а, значит, изображение будет мнимым, прямым и увеличенным. Оно удалено от линзы на расстояние y , и увеличение ω определяется следующим способом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} &= \frac{1}{f} - \frac{n_{\text{в}}}{x} = - (n_{\text{в}} - 1) \frac{1}{f}, \\ y &= - \frac{f}{n_{\text{в}} - 1}, \\ \omega &= n_{\text{в}} \frac{y}{x} = - n_{\text{в}} \frac{f}{(n_{\text{в}} - 1)f} = \\ &= - \frac{n_{\text{в}}}{n_{\text{в}} - 1} = - \frac{4/3}{1/3} = - 4. \end{aligned}$$

Следовательно, полученное мнимое изображение будет увеличено в 4 раза.

Рассмотрим теперь случай, когда линза приклеена к стенке аквариума с внутренней стороны. Сначала определим фокусное расстояние $f_{\text{п}}$. Очевидно, что пучок параллельных лучей, падающих снаружи, не претерпевает изменений на стенке аквариума, независимо от того, находится внутри него вода или воздух. Фокусное расстояние в данном случае должно быть равно фокусному расстоянию тонкой стеклянной линзы, находящейся в воде, т. е. должно быть таким, как фокусное расстояние линзы с коэффициентом преломления $n = n_{\text{ст}}/n_{\text{в}}$, находящейся в воздухе. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_{\text{п}}} &= \left(\frac{n_{\text{ст}}}{n_{\text{в}}} - 1 \right) \frac{1}{R} = \left(\frac{n_{\text{ст}}}{n_{\text{в}}} - 1 \right) \frac{1}{n_{\text{ст}} - 1} \frac{n_{\text{ст}} - 1}{R} = \\ &= \frac{n_{\text{ст}}/n_{\text{в}} - 1}{n_{\text{ст}} - 1} \cdot \frac{1}{f}, \\ f_{\text{п}} &= n_{\text{в}} \frac{n_{\text{ст}} - 1}{n_{\text{ст}} - n_{\text{в}}} f. \end{aligned}$$

Фокусное расстояние для изображения $f_{\text{из}}$ можно определить методом, использованным выше. Проведем несложные вычисления, получим

$$f_{\text{из}} = \frac{n_{\text{ст}} - 1}{n_{\text{ст}} - n_{\text{в}}} f.$$

Зная $f_{\text{п}}$ и $f_{\text{из}}$, получаем соотношения

$$\frac{f_{\text{п}}}{x} + \frac{f_{\text{из}}}{y} = 1, \quad \omega = \frac{y}{x} \cdot \frac{f_{\text{п}}}{f_{\text{из}}}.$$

Таким образом, положение и увеличение изображения можно рассматривать в зависимости от положения предмета, но рассуждения при этом остаются такими же, что и в предыдущем случае. Разница будет лишь количественной. Так, при $x = f$ получим

$$y = -f \quad \text{и} \quad \omega = -\frac{4}{3}.$$

Как и прежде, изображение будет прямое, мнимое, но увеличенное лишь в соотношении 4 : 3.

5. Легко заметить, что угол отклонения будет наименьшим тогда, когда сумма углов α_1 и α_2 (рис. 112)

будет наименьшей. Простые геометрические построения и рассуждения приводят к формулам

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \beta + \gamma, \\ \beta_2 &= \beta - \gamma,\end{aligned}$$

где β — угол преломления при симметричном ходе лучей. Из закона преломления следует

$$\left. \begin{aligned}\sin \alpha_1 &= n \sin (\beta + \gamma) \\ \sin \alpha_2 &= n \sin (\beta - \gamma)\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Дифференцируя эти уравнения по γ (по правилу дифференцирования сложной функции), получаем

$$\left. \begin{aligned}\alpha_1' \cos \alpha_1 &= n \cos (\beta + \gamma) \\ \alpha_2' \cos \alpha_2 &= -n \cos (\beta - \gamma)\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Значок «штрих» здесь означает производную по γ . Тогда

$$(\alpha_1 + \alpha_2)' = n \left[\frac{\cos (\beta + \gamma)}{\cos \alpha_1} - \frac{\cos (\beta - \gamma)}{\cos \alpha_2} \right].$$

Подставив из уравнений (1) $\cos \alpha_1$ и $\cos \alpha_2$ и приравняв правые части нулю, убеждаемся, что $(\alpha_1 + \alpha_2)' =$

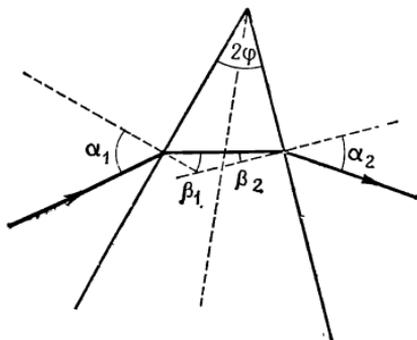


Рис. 112

$= 0$ только в том случае, когда $\gamma = 0$. Этот вывод следовало предвидеть, поскольку ясно, что если угол отклонения для $+\gamma$ таков, как и для $-\gamma$, то при $\gamma = 0$ должен наблюдаться экстремум.

Чтобы установить, будет ли при $\gamma = 0$ сумма углов $(\alpha_1 + \alpha_2)$ минимальной или максимальной, нуж-

но вычислить вторую производную $(\alpha_1 + \alpha_2)''$ в точке $\gamma = 0$ и определить ее знак. Имеем

$$(\alpha_1 + \alpha_2)'' = n \left[\frac{-\sin(\beta + \gamma) \cos \alpha_1 + \cos(\beta + \gamma) \sin \alpha_1 \alpha_1'}{\cos^2 \alpha_1} - \frac{\sin(\beta - \gamma) \cos \alpha_2 + \cos(\beta - \gamma) \sin \alpha_2 \alpha_2'}{\cos^2 \alpha_2} \right].$$

При $\gamma = 0$ углы α_1 и α_2 равны. Обозначим их суммарное значение через α . Тогда

$$(\alpha_1 + \alpha_2)''_{\gamma=0} = n \frac{-2 \sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha (\alpha_1' - \alpha_2')_{\gamma=0}}{\cos^2 \alpha}.$$

Величину $(\alpha_1' - \alpha_2')$ определим из уравнений (2). После несложных преобразований для $\gamma = 0$ получаем

$$(\alpha_1' - \alpha_2')_{\gamma=0} = 2n \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha_2)''_{\gamma=0} &= n \left[-2 \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} + \frac{\cos \beta \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} 2n \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right] = \\ &= \frac{2n \sin \beta}{\cos \alpha} \left[n \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha} - 1 \right] = \\ &= \frac{2n \sin \beta}{\cos \alpha} \left(\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \beta} - 1 \right) > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, симметричный ход луча соответствует минимуму угла отклонения. Этот факт излагается во всех школьных учебниках, но доказательство его приводится редко. Приведенное здесь доказательство оказывается достаточно ясным благодаря удачному выбору независимой переменной.

6. Введем обозначения, как показано на рис. 113. Толщина стекла трубки кажется равной нулю, когда крайние лучи из трубки, попадающие в глаз, проходят, касаясь внешней поверхности стекла. Из соображений симметрии вполне достаточно рассматривать только один из лучей, который выходит из трубки, касаясь ее поверхности. Лучи, попадающие со стороны жидкости в точку A на внутренней поверхности трубки, расходятся в пределах двойного угла, равного $2\alpha_{\max}$. Рассмотрим крайний луч, который выходит из

трубки, касаясь ее поверхности. Угол падения этого луча на внутреннюю поверхность трубки является пре-

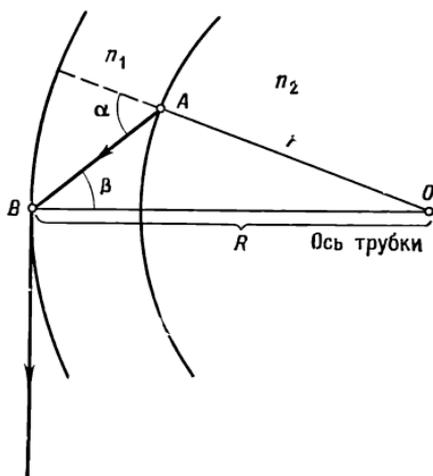


Рис. 113

дельным углом для границы сред стекло — воздух. Следовательно,

$$\sin \beta = \frac{1}{n_1}.$$

Из теоремы синусов для треугольника ABO имеем

$$\frac{r}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin (180^\circ - \alpha)},$$

или

$$\frac{r}{R} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}.$$

Условие задачи будет выполняться в том и только том случае, когда

$$\frac{r}{R} \geq \frac{1}{\sin \alpha_{\max}}.$$

Значение α_{\max} зависит от соотношения коэффициентов преломления n_1 и n_2 . Если $n_2 \leq n_1$, то $\sin \alpha_{\max} = n_2/n_1$ и, значит,

$$\frac{r}{R} \geq \frac{1}{n_2}.$$

Если $n_2 \geq n_1$, то $\alpha_{\max} = 90^\circ$ и тогда

$$\frac{r}{R} \geq \frac{1}{n_1}.$$

В общем случае можем записать

$$\frac{r}{R} \geq \max\left(\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}\right),$$

или

$$\frac{r}{R} \geq \frac{1}{\min(n_1, n_2)}.$$

В более простой форме эти соотношения можно записать так:

$$\frac{r}{R} \geq \begin{cases} \frac{1}{n_1} & \text{при } n_1 \leq n_2, \\ \frac{1}{n_2} & \text{при } n_1 \geq n_2. \end{cases}$$

Явление, подобное рассмотренному в этой задаче, можно наблюдать, разглядывая бутылку, наполненную молоком. Кажется, что молоко заполняет бутылку «от края до края», как будто толщина стекла бутылки равна нулю.

7. Из рис. 114 видно, что лучи 1 и 2 пересекаются вне шара, справа от точки B в том и только том слу-

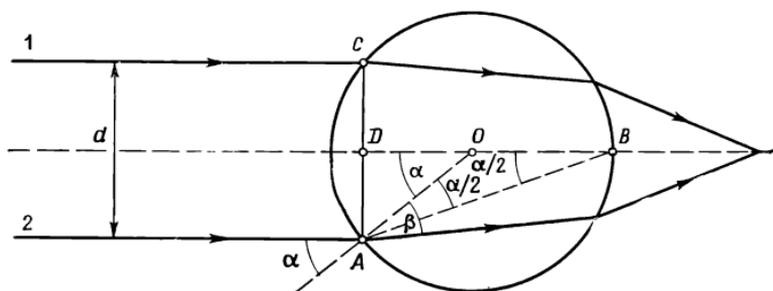


Рис. 114

чае, когда угол преломления β больше $\alpha/2$. При $\beta = \alpha/2$ пересечение лучей происходит в точке B , а при $\beta < \alpha/2$ лучи пересекаются внутри шара.

Из рисунка следует

$$\sin \alpha = \frac{d/2}{R} = \frac{d}{2R}.$$

Условием пересечения лучей вне шара является, как было отмечено, $\beta > \alpha/2$. Учитывая, что углы α и β меньше 90° , можем это условие записать в виде

$$\sin \beta > \sin \frac{\alpha}{2},$$

но

$$\sin \beta = \frac{1}{n} \sin \alpha,$$

значит,

$$\frac{1}{n} \sin \alpha > \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно,

$$n < 2 \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Выразив $\cos \frac{\alpha}{2}$ через $\sin \alpha$, находим

$$n < 2 \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{2}}.$$

Подставляя $d/2R$ вместо $\sin \alpha$, получаем ответ на первый вопрос:

$$n < \sqrt{2 + \sqrt{4 - \frac{d^2}{R^2}}}.$$

Выражение справа является монотонно убывающей функцией d , которое может, согласно условию задачи, принимать значения от 0 до $2R$. Наименьшее значение этой функции (при $d = 2R$) равно $\sqrt{2}$. Значит, для $n < \sqrt{2}$ лучи пересекаются вне шара независимо от величины d . Чтобы лучи пересекались внутри шара, должно выполняться противоположное условие:

$$n > \sqrt{2 + \sqrt{4 - \frac{d^2}{R^2}}}.$$

Выражение, стоящее в правой части, имеет наибольшее значение при $d = 0$ и равно 2. Следовательно, при $n > 2$ лучи будут пересекаться внутри шара независимо от величины d . В пределах $\sqrt{2} < n < 2$ лучи могут пересекаться как внутри, так и вне шара, в зави-

симости от того, больше или меньше величина n по сравнению с $\sqrt{2 + \sqrt{4 - \frac{d^2}{R^2}}}$. Из этого следует, что линза в форме шара дает сферическую аберрацию.

8. Рассмотрим луч света, проходящий через несколько плоскопараллельных пластинок с различными

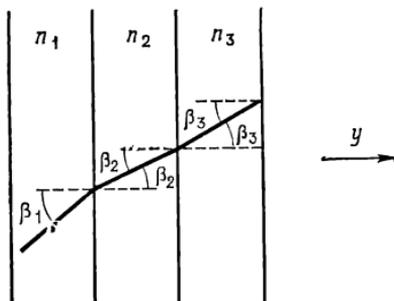


Рис. 115

коэффициентами преломления (рис. 115). Закон Снелла

$$\frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

можно записать в виде

$$n_2 \sin \beta_2 = n_1 \sin \beta_1.$$

Аналогичным образом получаем

$$n_3 \sin \beta_3 = n_2 \sin \beta_2 \quad \text{и т. д.}$$

Следовательно,

$$n_1 \sin \beta_1 = \text{const.}$$

Это соотношение не зависит от числа и толщины отдельных слоев. Следовательно, им можно воспользоваться и при плавном изменении коэффициента преломления в каком-то одном направлении — в нашем случае это направление y :

$$n(y) \sin \beta(y) = \text{const.},$$

где $\beta(y)$ — угол между направлением луча и осью y (рис. 116).

Отметим, что в точке $x = 0$ парабола должна касаться оси x . Уравнение параболы в данной системе координат запишется в виде

$$y = ax^2,$$

где a — постоянная, характеризующая крутизну параболы.

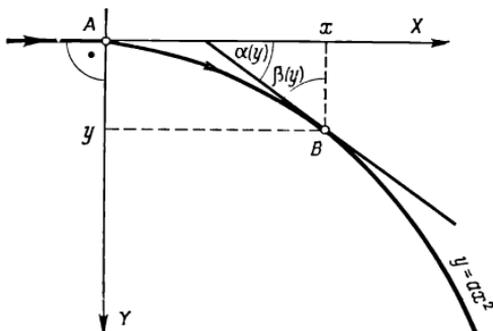


Рис. 116

Используя установленную выше зависимость, можем записать (для точек A и B)

$$n(y) \sin \beta(y) = n(0) \sin \beta(0),$$

но

$$\sin \beta(0) = \sin 90^\circ = 1, \quad \text{а} \quad n(0) = n_0.$$

Следовательно,

$$\sin \beta(y) = \frac{n_0}{n(y)}.$$

Тангенс угла наклона касательной в точке B равен производной функции $y = ax^2$.

$$\operatorname{tg} \alpha(y) = 2ax = 2a \sqrt{y/a} = 2 \sqrt{ay}.$$

Зная $\operatorname{tg} \alpha(y)$ или $\operatorname{ctg} \beta(y)$, можно записать $\sin \beta(y)$ иначе, чем прежде, а именно

$$\sin \beta(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4ay}}.$$

Кроме того,

$$\frac{n_0}{n(y)} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4ay}},$$

т. е. окончательно получаем

$$n(y) = n_0 \sqrt{1 + 4ay}.$$

Рассмотренная задача может показаться читателю несколько парадоксальной. Казалось бы, луч, падающий на границу прозрачной среды, должен идти вдоль оси x , а не по искривленной траектории. В связи с этим следует добавить несколько слов.

Говоря о луче света, мы, как правило, имеем в виду узкий пучок света, который с некоторым приближением можно считать участком фронта плоской волны (принцип Гюйгенса). Пусть такая волна падает на центр оптической неоднородности, как показано на

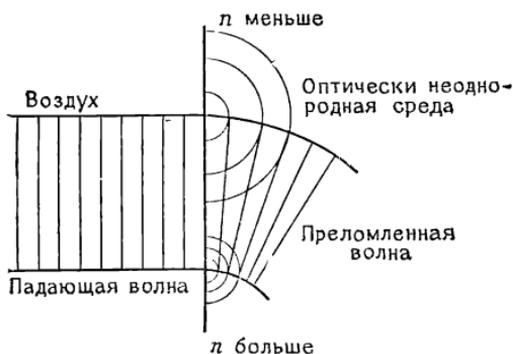


Рис. 117

рис. 117. Вторичная волна в различных средах движется с различными скоростями: тем быстрее, чем меньше n , и наоборот. Как видим, фронт преломленной волны, будучи фронтом вторичных волн, должен быть искривлен.

Лучи, рассматриваемые в геометрической оптике, — это идеализация. В реальной природе «лучей» не существует. Поэтому, если задачу нельзя решить с точки зрения геометрической оптики, следует представить луч как перпендикуляр к участку фронта плоской волны, ширина которого значительно больше, чем длина волны, и рассмотреть данное явление с точки зрения волновой оптики.

9. Радуга возникает в результате преломления света в каплях жидкости, имеющейся в воздухе. Луч света, входящий в каплю и падающий на ее внутреннюю поверхность, может частично выйти наружу, а частично претерпеть внутреннее отражение. В свою оче-

редь, отраженный луч, вновь падая на внутреннюю поверхность капли, может частично отразиться, а частично выйти из капли и т. д. Докажем, что под определенными углами из капли будет выходить особенно много света.

Пусть φ — угол между направлением луча, падающего на каплю жидкости, и направлением выходящего луча, а α — угол падения (рис. 118). Очевидно, что

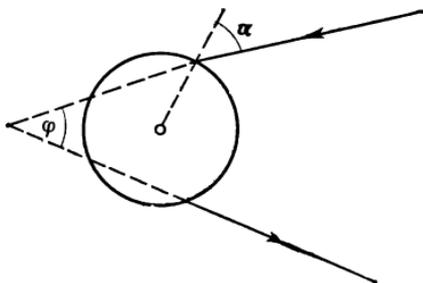


Рис. 118

угол φ является функцией угла α . Если углу α соответствует угол φ , то углу $\alpha + \Delta\alpha$ соответствует некоторый угол, который можно обозначить через $\varphi + \Delta\varphi$. Предположим, на каплю падает параллельный пучок света. Обозначим через $P(\alpha)$ поток световой энергии, приходящийся на единичный угол в небольшом интервале углов падения $\Delta\alpha$. На интервал $\Delta\alpha$ приходится энергия $P(\alpha)\Delta\alpha$. Аналогично поток световой энергии, «испускаемой» каплей и приходящейся на единицу угла в небольшом интервале углов $\Delta\varphi$, обозначим через $R(\varphi)$. Тогда на весь интервал $\Delta\varphi$ приходится энергия $R(\varphi)\Delta\varphi$. Эта энергия отлична от нуля и составляет некоторую часть $A(\alpha)$ энергии $P(\alpha)\Delta\alpha$. Следовательно,

$$A(\alpha) P(\alpha) \Delta\alpha = R(\varphi) \Delta\varphi.$$

Вид функции $A(\alpha)$ для нас несуществен. Важно лишь, что эта функция не равна нулю. Тогда можем записать

$$R(\varphi) = \frac{A(\alpha) P(\alpha)}{\Delta\varphi/\Delta\alpha}.$$

Устремив $\Delta\alpha$ к нулю, получаем

$$R(\varphi) = \frac{A(\alpha) P(\alpha)}{\varphi'},$$

где φ' — производная φ по α . Поскольку для $|\alpha| < 90^\circ$ величина $P(\alpha)$ отлична от нуля, очевидно, что $R(\varphi)$ стремится к бесконечности, когда φ' стремится к нулю. Это означает, что для тех углов φ , для которых $\varphi' = 0$, из капельки выходит значительно больше света. Таким образом, наша задача сводится к изучению зависимости $\varphi'(\alpha)$.

Читатель без труда может убедиться, что для луча, который не претерпел в капле ни одного внутреннего отражения, функция $\varphi(\alpha)$ не имеет экстремума в интервале углов α от 0 до $\pi/2$.

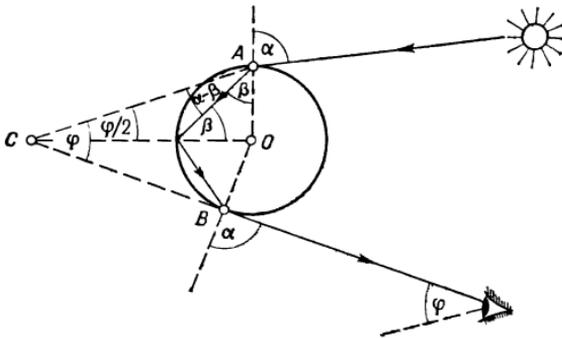


Рис. 119

Рассмотрим теперь случай, когда в капле происходит только одно внутреннее отражение. Этот случай иллюстрирует рис. 119. Можно показать, что для угла φ выполняется условие

$$\varphi = 4\beta - 2\alpha.$$

Для этого достаточно определить сумму углов треугольника AOC . Исследуем теперь на экстремум функции $\varphi(\alpha)$:

$$\varphi' = 4\beta' - 2.$$

Следовательно, $\varphi' = 0$, если

$$2\beta' = 1.$$

Величину β' определим из равенства

$$\sin \alpha = n \sin \beta,$$

где n — коэффициент преломления капли. Дифференцируя обе части по α , находим

$$\cos \alpha = n \cos \beta \cdot \beta',$$

откуда

$$\beta' = \frac{\cos \alpha}{n \cos \beta}.$$

Кроме того,

$$\frac{2 \cos \alpha}{n \cos \beta} = 1.$$

Используя закон Снелла $\sin \alpha = n \sin \beta$, нетрудно это уравнение представить в виде

$$\sin^2 \alpha = \frac{4 - n^2}{3}.$$

Полученное уравнение позволяет определить угол α , при котором $\varphi' = 0$. Зная α , можно определить β , а затем φ . Ясно, что угол φ зависит от n . Значит, для разных значений n , а следовательно, для разных длин волн (соответствующих разным цветам спектра) углы φ , при которых свет, испускаемый каплей, имеет наибольшую интенсивность, различны. Так возникает радуга. Угловой размер полосы каждого цвета радуги, очевидно, равен углу φ , определенным образом зависящему от коэффициента преломления n для данной длины волны. Для указанных в задаче длин волн получаем

$$\varphi_{кр} = 26,66^\circ, \quad \varphi_{\varphi} = 25,67^\circ.$$

Подобным образом можно проанализировать радуги второго, третьего и т. д. порядков, т. е. радуги, соответствующие двум, трем и т. д. внутренним отражениям света внутри капли жидкости. Однако, как очевидно, наиболее яркой будет радуга первого порядка.

Чтобы радугу можно было наблюдать, угловая высота Солнца над горизонтом не должна превышать углового размера радуги. В противном случае радуга будет находиться под горизонтом и будет недоступна для наблюдения.

На практике функция $R(\varphi)$ никогда не достигает бесконечности, а лишь имеет очень острый и высокий максимум. Это объясняется тем, что Солнце не яв-

ляется точечным источником света, а капли жидкости не являются идеальными шариками; кроме того, сказываются дифракционные явления. Все это не учитывалось в ходе наших рассуждений.

Плоскость, транспортер, винт, шар, вал

1. Параллельно плоскости на шар действуют две силы: составляющая силы тяжести $mg \sin \alpha$ и сила трения \vec{T} (рис. 120). Результирующая этих сил сообщает центру шара линейное ускорение \vec{a} :

$$ma = mg \sin \alpha - T,$$

где m — масса шара. Сила трения приложена к точке соприкосновения шара и плоскости. Эта сила сооб-

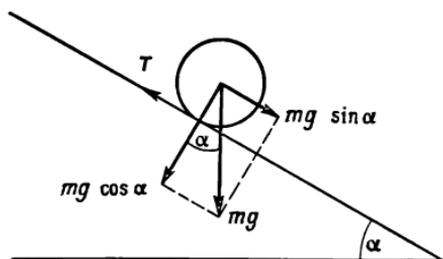


Рис. 120

щает шару угловое ускорение относительно оси, проходящей через центр, равное ε :

$$I\varepsilon = Tr,$$

где r — радиус шара, а I — момент инерции относительно оси, проходящей через центр; $I = \frac{2}{5}mr^2$. Эти два уравнения выражают второй закон Ньютона для поступательного и вращательного движений. В уравнения входят три неизвестные величины a , ε и T . Если скатывание происходит без проскальзывания, то a и ε связаны соотношением

$$a = \varepsilon r.$$

При движении без проскальзывания в системе, связанной с центром шара, в каждый момент времени линейная скорость шара относительно наклонной пло-

скости должна быть такой же, как и скорость точек на «периферии» шара. Это означает, что при таком движении линейная и угловая скорости связаны соотношением

$$v = \omega r.$$

Взяв производные по времени от обеих частей последнего равенства, получим приведенную выше зависимость между a и ε . Используя первые три уравнения, определим T :

$$T = \frac{mg \sin \alpha}{\frac{mr^2}{I} + 1}.$$

Подставив в это уравнение значение момента инерции шара I , заданное в условии задачи, получим выражение для силы трения шара, движущегося по плоскости без проскальзывания:

$$T = \frac{2}{7} mg \sin \alpha.$$

Величина силы трения не может превышать максимальную силу трения $T_{\max} = fN$, где N — сила нормального давления. В нашем случае

$$N = mg \cos \alpha.$$

Тогда получаем неравенство

$$T = \frac{2}{7} mg \sin \alpha \leq T_{\max} = fmg \cos \alpha.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{7}{2} f,$$

$$\alpha \leq \operatorname{arctg} \frac{7}{2} f.$$

Это означает, что движение шара может происходить без проскальзывания только в том случае, если угол наклона плоскости не превышает $\operatorname{arctg} \frac{7}{2} f$. Здесь важно подчеркнуть, что скатывание без проскальзывания служит проявлением действия силы трения. Встречающееся иногда выражение «шар скатывается без трения и без проскальзывания» является, очевидно, неверным и свидетельствует о непонимании процесса

скатывания. Но при скатывании без проскальзывания сила трения не совершает работу. Почему?

2. Воспользовавшись выводами предыдущей задачи, нетрудно определить, что при $f = \frac{2}{7}$ шарик будет скатываться без проскальзывания, если наклон плоскости не превышает 45° . При большем наклоне движение будет происходить с проскальзыванием. Оба эти случая требуют отдельного рассмотрения.

а. Движение без проскальзывания ($\alpha \leq 45^\circ$). В этом случае сила трения не совершает работы и

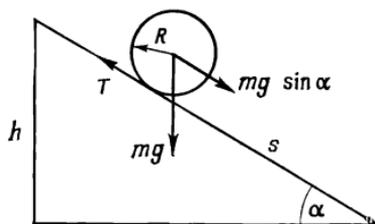


Рис. 121

полная механическая энергия шарика остается постоянной. Используя обозначения, приведенные на рис. 121, можно записать

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

где mgh — разность между значениями потенциальной энергии шарика на вершине наклонной плоскости и у ее основания, а выражение, стоящее в правой части, представляет собой полную энергию шарика в конечный момент. Приведенное уравнение выражает закон сохранения энергии (очевидно, начальная кинетическая энергия шарика равна нулю). Скорости v и ω связаны между собой соотношением

$$\omega = v/R.$$

Момент инерции шарика

$$I = \frac{2}{5} mR^2,$$

где R — радиус шарика.

Подставив последние два выражения в первое уравнение, получим зависимость, из которой без труда

определим искомую конечную скорость

$$v = \sqrt{\frac{10}{7} gh}.$$

б. Движение с проскальзыванием ($\alpha > 45^\circ$).

В этом случае при проскальзывании поверхности шарика по плоскости часть энергии шарика рассеивается в виде тепла, поэтому механическая энергия шарика изменяется. Следовательно, при решении этой части задачи мы не можем воспользоваться законом сохранения энергии.

Параллельно наклонной плоскости действуют две силы: составляющая силы тяжести $mg \sin \alpha$, направленная к основанию плоскости, и сила трения T , направленная к ее вершине. Сила трения в этом случае имеет максимальное возможное значение fN , где $N = mg \cos \alpha$ — сила нормального давления шарика на плоскость. Если через a обозначить ускорение поступательного движения шарика, то, согласно второму закону Ньютона, можно записать

$$ma = mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha,$$

т. е.

$$a = g \sin \alpha - fg \cos \alpha.$$

Путь s , пройденный центром шарика, равен

$$s = \frac{h}{\sin \alpha}.$$

Зная a и s , определим скорость v из соотношения $v = \sqrt{2as}$:

$$v = \sqrt{2gh(1 - f \operatorname{ctg} \alpha)} \quad (\alpha > 45^\circ).$$

При заданном $f = \frac{2}{7}$

$$v = \sqrt{2gh \left(1 - \frac{2}{7} \operatorname{ctg} \alpha\right)} \quad (\alpha > 45^\circ).$$

Зависимость конечной скорости шарика от угла наклона плоскости представлена на рис. 122.

Полученный результат может показаться парадоксальным, поскольку при проскальзывании, а значит, при наличии тепловых потерь энергии скорость оказалась больше, чем в отсутствие проскальзывания и, следовательно, теплового рассеяния энергии. При углах $\alpha < 45^\circ$ кинетическая энергия вращательного дви-

жения шарика составляет неизменную часть кинетической энергии его поступательного движения, тогда как при углах $\alpha > 45^\circ$ она очень быстро уменьшается, что читатель без труда может доказать самостоятельно.

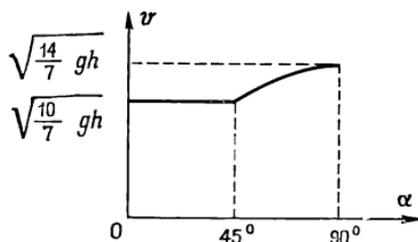


Рис. 122

Для углов $\alpha > 45^\circ$ кинетическая энергия поступательного движения возрастает за счет кинетической энергии вращательного движения. Это относится и к теплу, выделяющемуся во время движения.

3. Эту задачу можно решать в различных системах отсчета, например в инерциальной системе, связанной со столом, или в неинерциальной системе, связанной с клином.

Рассмотрим неинерциальную систему, в которой клин покоится. Как известно, в неинерциальной системе отсчета при записи законов Ньютона необходимо учитывать силы инерции.

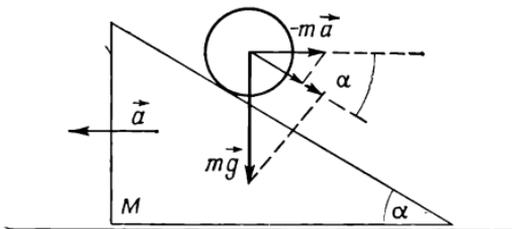


Рис. 123

Введем обозначения согласно рис. 123. В системе отсчета, связанной с клином, на шарик кроме силы тяжести, силы трения и реакции клина действует еще сила инерции, равная $-ma$. Тогда в направлении, параллельном плоскости, на шарик действует сила

$$F_{\parallel} = mg \sin \alpha + ma \cos \alpha - T,$$

где m — масса шарика, T — сила трения. Согласно второму закону Ньютона,

$$ma' = mg \sin \alpha + ma \cos \alpha - T,$$

где a' — ускорение центра шарика относительно клина.

Сила трения T сообщает шарiku угловое ускорение ε . Второй закон Ньютона для вращательного движения запишется как

$$I\varepsilon = Tr,$$

где r — радиус шарика, $I = \frac{2}{5}mr^2$ — его момент инерции.

При движении без проскальзывания справедливо равенство

$$a = \varepsilon r.$$

Следовательно, мы имеем три уравнения с тремя неизвестными T , a' и ε . Решив эту систему уравнений, найдем a' :

$$a' = \frac{5}{7}(g \sin \alpha + a \cos \alpha).$$

Ускорение a' направлено вдоль плоскости клина. Его можно разложить на две составляющие: параллельную и перпендикулярную к столу, или, иначе говоря, на вертикальную и горизонтальную. Горизонтальная составляющая ускорения a' равна

$$a'_{\text{гор}} = a' \cos \alpha = \frac{5}{7}(g \sin \alpha + a \cos \alpha) \cos \alpha.$$

Это ускорение является результатом действия двух сил — силы инерции и горизонтальной составляющей силы реакции опоры $R_{\text{гор}}$. Следовательно,

$$ma + R_{\text{гор}} = ma'_{\text{гор}}.$$

Тогда

$$R_{\text{гор}} = \frac{5}{7} m (g \sin \alpha + a \cos \alpha) \cos \alpha - ma.$$

В рассматриваемой неинерциальной системе отсчета клин покоится. Это означает, что сумма действующих на него сил (действительных и силы инерции) равна нулю. На клин действует сила инерции

(направленная вправо) и сила, направленная противоположно $R_{\text{тор}}$ (влево). Поэтому

$$Ma = m \left[\frac{5}{7} g \sin \alpha \cos \alpha + \frac{5}{7} a \cos^2 \alpha - a \right].$$

Из этого уравнения определим ускорение клина

$$a = \frac{\frac{5}{7} mg \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \left(1 - \frac{5}{7} \cos^2 \alpha \right)}.$$

Предложенное решение не единственное, а одно из возможных. Наиболее естественным, но достаточно громоздким является способ решения, заключающийся в записи уравнений законов Ньютона в инерциальной системе отсчета. В таком случае мы получили бы систему из шести уравнений с шестью неизвестными: 1) уравнение второго закона механики для клина; 2, 3) два уравнения второго закона механики для вертикальной и горизонтальной составляющих линейного ускорения центра шара; 4) уравнение, выражающее второй закон механики для вращательного движения шарика; 5) уравнение, устанавливающее условие качения без проскальзывания и 6) уравнение, выражающее тот факт, что ускорение шарика относительно клина параллельно плоскости клина. В этих уравнениях присутствуют два типа сил реакции: давление шарика на клин (перпендикулярно к клину) и сила трения. Однако такой способ решения слишком трудоемкий.

Еще один способ решения состоит в использовании законов сохранения и того факта, что центр масс системы клин + шарик не перемещается в горизонтальном направлении. Решение задачи этим методом предоставляем читателю.

4. В системе отсчета, связанной с движущейся лентой, ситуация выглядит так, как если бы на неподвижную ленту бросили мел с начальной скоростью $v = 5$ м/с. Пусть масса мела равна m . Начальная кинетическая энергия мела (в выбранной системе отсчета) полностью переходит в работу против сил трения. Если коэффициент трения мела о ленту транс-

портера равен f , то это утверждение можно записать как

$$\frac{1}{2}mv^2 = fmg s,$$

откуда

$$f = \frac{v^2}{2gs}.$$

После включения торможения система отсчета, связанная с транспортером, становится неинерциальной. Теперь на мел действует сила инерции, равная ma и направленная в сторону движения транспортера. Эта сила аналогична силе, действующей на пассажиров при торможении трамвая или поезда. Чтобы при торможении мел двигался, необходимо, чтобы сила ma превышала максимальное значение силы трения, равной fmg . Следовательно, чтобы мел не оставлял на ленте черты, должно выполняться условие

$$ma \leq fmg,$$

или

$$a \leq \frac{v^2}{2s} = 2,5 \text{ м/с}^2.$$

Согласно условию задачи, $a = 5 \text{ м/с}^2$, а значит, последнее условие не выполняется и при торможении мел движется по ленте транспортера и оставляет на ней черту. Определим ее длину s_1 .

Мел будет двигаться по транспортеру ускоренно, пока на него действует сила ma . После остановки транспортера мел имеет отличную от нуля начальную скорость и под действием силы трения продолжает двигаться замедленно до полной остановки.

Время торможения равно $t_1 = v/a$.

Ускорение мела a_1 относительно транспортера определим из соотношения

$$ma_1 = ma - T,$$

выражающего второй закон Ньютона в неинерциальной системе отсчета, связанной с транспортером. Сила трения $T = fmg$ (коэффициент трения f остается прежним), тогда

$$ma_1 = ma - fmg,$$

или

$$a_1 = a - \frac{v^2}{2s}.$$

Путь, пройденный мелом (относительно транспортера) при торможении транспортера, равен $1/2 a_1 t_1^2$, или

$$\frac{1}{2} \left(a - \frac{v^2}{2s} \right) \frac{v^2}{a^2}.$$

В момент остановки транспортера скорость мела относительно него равна

$$v_1 = a_1 t_1 = \left(a - \frac{v^2}{2s} \right) \frac{v}{a}.$$

Ускорение мела при замедлении после остановки транспортера

$$a_2 = T/m = fg = \frac{v^2}{2s}.$$

Время торможения мела

$$t_2 = \frac{v_1}{a_2} = (2as/v^2 - 1) \frac{v}{a}.$$

За это время мел прошел путь $1/2 a_2 t_2^2$, или

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{2s} \left(\frac{2as}{v^2} - 1 \right)^2 \frac{v^2}{a^2}.$$

Длина черты, оставленной мелом на ленте транспортера, следовательно, равна

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2} \left(a - \frac{v^2}{2s} \right) \frac{v^2}{a^2} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{2s} \left(\frac{2as}{v^2} - 1 \right)^2 \frac{v^2}{a^2} = \\ &= \left(a - \frac{v^2}{2s} \right) \frac{s}{a}. \end{aligned}$$

Подставив числовые значения величин, находим $s_1 = 2,5$ м.

В подобных задачах нередко допускают грубую ошибку, связанную с законом сохранения энергии. Остановимся на этом подробнее. Рассмотрим ситуацию, когда мел бросают на транспортер. На первый взгляд может показаться, что для определения длины черты, оставляемой мелом на ленте транспортера, можно воспользоваться уравнениями закона сохранения

энергии в системе, неподвижной относительно, скажем; пола. В этой системе транспортер движется со скоростью v . Можно было бы ожидать, что полная механическая энергия мела до соприкосновения с транспортером (равная нулю) должна быть равна сумме работы сил трения при вычерчивании линии ($fmg s$) и конечной полной кинетической энергии мела ($\frac{1}{2}mv^2$), т. е.

$$0 = fmg s + \frac{1}{2}mv^2.$$

Это равенство не может выполняться, поскольку в левой части его стоит нуль, а в правой — положительная величина. Дело в том, что мы не учли здесь работу двигателей, обеспечивающих перемещение ленты транспортера независимо от того, что происходит с кусочком мела. Однако именно благодаря работе двигателей мел совершает работу при скольжении по транспортеру и приобретает кинетическую энергию. Подобные затруднения не возникают, когда задача решается в системе отсчета, связанной с равномерно движущейся лентой транспортера.

5. Прежде всего определим отношение моментов инерции обоих шаров. Сплошной шар будем называть первым, а полый — вторым; ρ_1 и ρ_2 — плотности сплошного и полого шаров соответственно. Для удобства введем также обозначения $\gamma = 4\pi/3$, $\beta = r/R$. Масса первого шара

$$M_1 = \gamma R^3 \rho_1,$$

масса второго

$$M_2 = \gamma R^3 \rho_2 - \gamma r^3 \rho_2 = \gamma R^3 \rho_2 (1 - \beta^3).$$

Поскольку по условию эти массы равны, то

$$\rho_2 = \frac{\rho_1}{1 - \beta^3}.$$

Теперь определим моменты инерции шаров I_1 и I_2 :

$$I_1 = \alpha MR^2 = \alpha \gamma \rho_1 R^5,$$

где $\alpha = 2/5$;

$$I_2 = \alpha \gamma \rho_2 R^5 - \alpha \gamma \rho_2 r^5 = \alpha \gamma \rho_2 R^5 (1 - \beta^5) = I_1 \frac{1 - \beta^5}{1 - \beta^3},$$

или

$$I_2 = I_1 \frac{1 - \beta^5}{1 - \beta^3}.$$

Пользуясь случаем, отметим, что полученная связь между I_2 и I_1 справедлива не только для шаров, но и для любых тел одинаковой формы и равных масс, одно из которых сплошное, а другое имеет полость, по форме подобную самому телу, относительно произвольной точки, лежащей на оси (рис. 124). В этом слу-

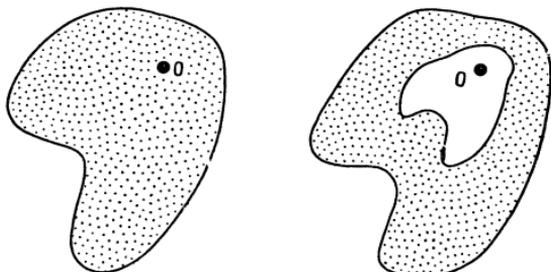


Рис. 124

чае β определяется как отношение соответствующих линейных размеров полости и сплошного тела. Конечно, значения α и γ в каждом конкретном случае будут иными.

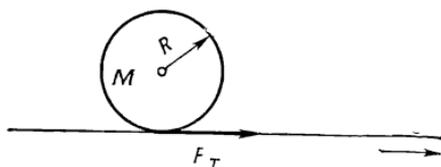


Рис. 125

Величина β ограничивается условием $0 < \beta < 1$, а значит,

$$I_2 > I_1.$$

Рассмотрим теперь шары на транспортере (рис. 125). При проскальзывании на шар действует сила трения

$$F_T = fMg$$

и момент сил трения относительно центра шара

$$M_T = fMgR,$$

где g — ускорение свободного падения. В момент прекращения проскальзывания начинается свободное качение шаров: F_T и M_T становятся равными нулю и со-

храняют это значение в течение всего дальнейшего движения.

Используя второй закон Ньютона для вращательного движения, определим угловое ускорение шара ε (индексы, указывающие номер шара, здесь можно опустить)

$$\varepsilon = \frac{M_{\Gamma}}{I}.$$

В нашем случае $I = \delta MR^2$, где $\delta = 2/5$ для сплошного шара и $\frac{2}{5} \cdot \frac{1 - \beta^5}{1 - \beta^3}$ для полого. Тогда угловое ускорение шара можно записать в виде

$$\varepsilon = \frac{fg}{\delta R}.$$

Угловая скорость шара $\omega = \varepsilon t$ выразится как ($\omega = 0$ при $t = 0$):

$$\omega = \frac{fg}{\delta R} t.$$

Линейная скорость самой нижней точки шара относительно его центра равна

$$v_{кр} = \omega R - \frac{fg}{\delta} t.$$

Сила трения сообщает центру шара ускорение a :

$$fMg = Ma, \quad a = fg.$$

Следовательно, центр шара движется относительно неподвижного наблюдателя со скоростью

$$v_{наб} = fgt.$$

Скорость ленты транспортера относительно центра шара равна

$$v_{л} = v_0 - fgt.$$

Скорость центра шара относительно ленты транспортера равна по абсолютной величине $v_{л}$, но противоположно направлена.

Проскальзывание исчезает (F_{Γ} и M_{Γ} становятся равными 0), когда скорость ленты относительно центра шара оказывается равной по величине скорости нижней точки шара относительно центра шара, т. е. когда

$$v_{л} = v_{кр}, \quad \text{или} \quad v_0 - fgt = \frac{1}{\delta} fgt.$$

После прекращения проскальзывания на шар не действуют никакие силы, и он движется равномерно, вращаясь с постоянной угловой скоростью.

На рис. 126 показано, как изменялась бы скорость $v_{л}$ относительно центра шара, если бы сила трения действовала все время. Аналогичный график скорости $v_{кр}$ для сплошного шара (δ_1) и имеющего полость



Рис. 126

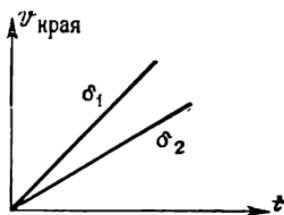


Рис. 127

($\delta_2; \delta_2 > \delta_1$) представлен на рис. 127. В действительности же проскальзывание исчезает в момент, когда $v_{л}$ становится равной $v_{кр}$. С этого момента указанные

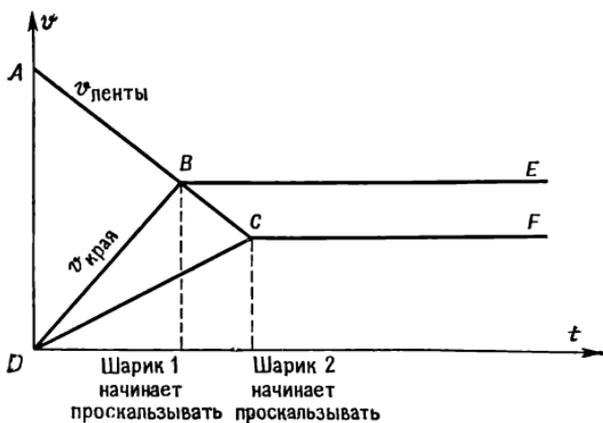


Рис. 128

скорости будут постоянны, что иллюстрирует рис. 128; на нем ломаная линия ABE показывает $v_{л}$ для шара 1;

ABE	показывает	$v_{л}$	для шара	1,
ACF	„	$v_{л}$	„	2,
DBE	„	$v_{кр}$	„	1,
DCF	„	$v_{кр}$	„	2.

Как видно из графика, время, когда исчезает проскальзывание, а затем и трение, зависит от наклона ломаной линии $v_{кр}$. Этот наклон тем больше, чем меньше δ . Следовательно, для сплошного шара проскальзывание исчезнет скорее, чем для полого. Конечная скорость ленты транспортера относительно центра сплошного шара больше, чем относительно центра полого шара. Отсюда следует, что линейная скорость сплошного шара относительно неподвижного наблюдателя будет меньше, чем скорость полого шара. Подтвердим этот вывод расчетом. Из соотношения

$$v_0 - fgt = \frac{1}{\delta} fgt$$

определим время t , по истечении которого проскальзывание исчезает:

$$t = \frac{v_0}{fg} \frac{1}{1 + 1/\delta}.$$

Очевидно, что для сплошного шара t будет меньше, поскольку в этом случае δ меньше.

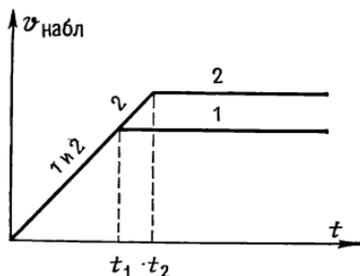


Рис. 129

С момента времени t скорость ленты относительно центра шара становится постоянной и равной

$$v_{л} = v_0 - fgt = \frac{v_0}{1 + \delta}.$$

Эта скорость больше для сплошного шара. Конечная скорость центра шара относительно наблюдателя равна

$$v_{наб} = fgt = \frac{v_0}{1 + 1/\delta}.$$

Эта скорость тем меньше, чем меньше δ (т. е. она меньше для сплошного шара). Изменение скорости

центров шаров относительно наблюдателя иллюстрирует рис. 129.

Следовательно, если положить на транспортер рядом два шара, то некоторое время они будут двигаться с ускорением. Проскальзывание исчезнет скорее для «быстрее вращающегося», т. е. для сплошного шара ($I_1 < I_2$). С этого момента сплошной шар начинает двигаться равномерно. Полый же шар еще некоторое время движется с ускорением, но потом и для него проскальзывание исчезнет. После прекращения проскальзывания он тоже будет двигаться равномерно, но с несколько большей скоростью, чем скорость сплошного шара.

6. Поступательное и вращательное движения гайки строго взаимосвязаны: при повороте гайки на один оборот ее центр масс смещается на расстояние, равное шагу винта s . При повороте на угол $\Delta\varphi$ вертикальное перемещение Δx пропорционально $\Delta\varphi$:

$$\frac{\Delta x}{s} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}.$$

Поделив обе части уравнения на время Δt , получаем

$$\frac{1}{s} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Устремляя Δt к нулю, получаем

$$\frac{1}{s} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{v}{s} = \frac{\omega}{2\pi},$$

где v — скорость поступательного движения гайки, ω — угловая скорость ее вращательного движения.

Поскольку трение отсутствует, при описании движения гайки можно воспользоваться законом сохранения механической энергии. Предположим, гайка сместилась на расстояние x , тогда приравнявая начальную и конечную полные энергии системы, имеем

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} I \omega_0^2 + mgx = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2,$$

где $\omega_0 = 2\pi v_0/s$ — начальная угловая скорость гайки,

Используя соотношения между v и ω , а также между v_0 и ω_0 , из последнего уравнения определяем

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2g}{1 + \frac{4\pi^2 I}{ms^2}} x.$$

Теперь представим себе тело, падающее с высоты x в некотором фиктивном гравитационном поле с ускорением g' и начальной скоростью v_0 . Закон сохранения энергии в этом случае выражается уравнением

$$v^2 = v_0^2 - 2g'x.$$

Очевидно, что, заменив g' на $g / \left(1 + \frac{4\pi^2 I}{ms^2}\right)$, мы получим уравнение того же вида, что и прежде, но зависимость $v(t)$ и $x(t)$ для второго уравнения хорошо известна:

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} g' t^2,$$

$$v = v_0 + g' t.$$

Это означает, что центр массы гайки опускается вниз с постоянным ускорением

$$g' = \frac{g}{1 + \frac{4\pi^2 I}{ms^2}},$$

а его скорость изменяется со временем по закону

$$v = v_0 + g' t = v_0 + \frac{g}{1 + \frac{4\pi^2 I}{ms^2}} t.$$

7. Данную задачу можно решать в различных системах отсчета. Наиболее удобно это делать в инерциальной системе, движущейся вместе с осью вала. В этой системе на центр тяжести вала действуют сила тяжести Mg и сила инерции Ma , направленная влево. В результате вал и груз находятся в таком состоянии, как если бы они двигались не по горизонтальным рельсам, а находились на наклонной плоскости, причем роль ускорения свободного падения выполняет векторная сумма ускорения свободного падения \vec{g} и ускорения \vec{a} , которую обозначим \vec{g}' , как показано на рис. 130. \vec{T} — сила трения, действующая на вал; \vec{N} — натяжение нити. Поскольку нить считаем невесомой, то сила, с которой нить действует на вал, равна по величине силе, с которой груз действует на нить.

В рассматриваемой системе отсчета вал вращается вокруг своей (неподвижной) оси с ускорением ε , а груз падает «вертикально», т. е. параллельно направлению ускорения \vec{g}' . Ускорение груза, очевидно, равно a .

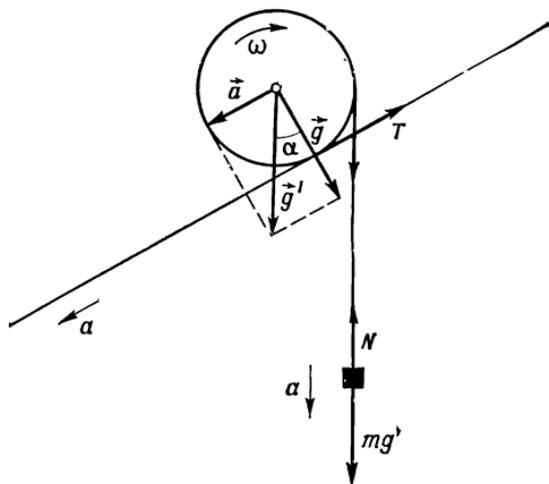


Рис. 130

Используя тот факт, что момент инерции однородного вала радиусом R и массой M равен $\frac{1}{2}MR^2$, запишем следующие уравнения:

$$mg' - N = ma, \quad (1)$$

$$NR - TR = \frac{1}{2}MR^2\varepsilon, \quad (2)$$

$$Ma + N\frac{a}{g'} - T = 0, \quad (3)$$

$$a = \varepsilon R, \quad (4)$$

$$g' = \sqrt{a^2 + g^2}. \quad (5)$$

Первое уравнение выражает второй закон Ньютона для поступательного движения груза. Второе — тот же закон для вращательного движения вала. Третье уравнение показывает, что в выбранной системе центр масс вала покоится (т. е. его ускорение равно нулю), четвертое уравнение выражает условие каче-

ния без проскальзывания, а пятое определяет величину результирующего ускорения.

Используя уравнения (4) и (5), первые три уравнения можно записать в виде

$$m \sqrt{a^2 + g^2} - N = ma,$$

$$N - T = \frac{1}{2} Ma,$$

$$Ma + N \frac{a}{\sqrt{a^2 + g^2}} = T.$$

Исключая из этих уравнений T и N , после несложных преобразований получим искомое отношение

$$\frac{m}{M} = \frac{3}{2} a \frac{\sqrt{a^2 + g^2}}{(\sqrt{a^2 + g^2} - a)^2}.$$

Теперь определим минимальную величину коэффициента трения. Как видно из рисунка, давление вала на плоскость равно

$$P = Mg + N \cos \alpha = Mg + N \frac{g}{g'},$$

а силу трения T находим из уравнения (3):

$$T = Ma + N \frac{a}{g'}.$$

Отношение силы трения к давлению не может превышать по величине коэффициент трения

$$\frac{T}{P} \leq f,$$

т. е.

$$f \geq \frac{a(M + N/g')}{g(M + N/g')} = \frac{a}{g}; \quad f \geq \frac{a}{g}.$$

Решение задачи в неподвижной системе отсчета намного сложнее и значительно менее наглядно.

8. Прежде всего отметим, что кинетическая энергия грузика постоянна. Это вытекает из закона сохранения механической энергии и отсутствия в данном случае потенциальной энергии.

Отсутствие потенциальной энергии не совсем очевидно, поэтому коротко остановимся на этом вопросе. На первый взгляд может показаться, что в отсутствие

внешнего поля необходимо учитывать потенциальную энергию натянутой нити. Сила, растягивающая нить, изменяется со временем, и можно было бы ожидать, что потенциальная энергия натянутой нити также изменяется. Обозначим натяжение нити через N , а ее константу упругости через k . Удлинение пусть будет равно Δl , однако, поскольку, согласно условию задачи, нить нерастяжима, следует устремить Δl к нулю:

$$N = k\Delta l.$$

Потенциальная энергия натянутой нити

$$E_{\text{п}} = \frac{1}{2} k (\Delta l)^2 = \frac{1}{2} \frac{N^2}{k}.$$

Ясно, что при Δl , стремящемся к нулю, коэффициент упругости k должен стремиться к бесконечности, так как в противном случае N не может быть конечным. Но при k , стремящемся к бесконечности, и конечной величине N потенциальная энергия $E_{\text{п}}$ стремится к нулю. Следовательно, для абсолютно нерастяжимой нити можно считать $E_{\text{п}} = 0$.

Из неизменности кинетической энергии следует, что скорость грузика v постоянна. В соответствии с обозначениями на рис. 131 имеем для малых Δt

$$\frac{\Delta l}{r} = \frac{v\Delta t}{l}, \quad \text{или} \quad \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{rv}{l}.$$

Устремляя Δt к нулю, получаем $dl/dt = rv/l$. Следовательно,

$$l \frac{dl}{dt} = rv, \quad \frac{1}{2} \frac{dl^2}{dt} = rv,$$

$$l^2 = 2rvt + C, \quad C - \text{const.}$$

Поскольку $l = 0$ при $t = 0$, получаем $C = 0$. Тогда

$$l = \sqrt{2rvt}.$$

В некоторых задачниках приводится неправильное решение этой задачи: там считают, что постоянным (либо почти постоянным) является момент импульса относительно оси валика. Это неверно. Натяжение нити, действующее на грузик, — это не центральная сила и момент импульса даже приближенно не остается постоянным. Если ненавитая часть нити достаточно

длина ($l \gg r$), то каждому обороту грузика вокруг вала соответствует увеличение его момента импульса на более или менее постоянную величину, равную $2\pi r m v$.

9. Натяжение ленты, определяемое по показанию пружинного динамометра, обозначим через N

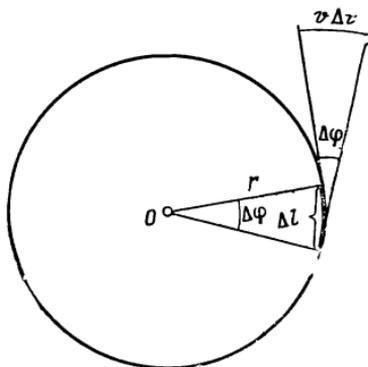


Рис. 131

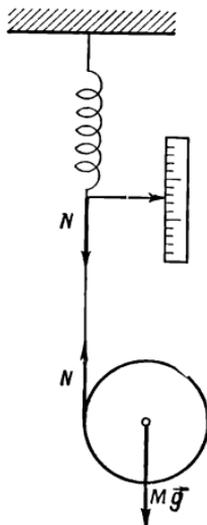


Рис. 132

(рис. 132). Линейное ускорение центра катушки равно

$$a = \frac{Mg - N}{M}.$$

Угловое ускорение катушки относительно центра симметрии равно

$$\varepsilon = \frac{NR}{I},$$

где $I = MR^2/2$ — момент инерции катушки относительно центра (R — радиус катушки). Поскольку лента не проскальзывает относительно катушки, a и ε связаны соотношением

$$a = \varepsilon R.$$

Следовательно,

$$\frac{Mg - N}{M} = \frac{NR}{\frac{1}{2}MR^2} R,$$

откуда

$$N = \frac{1}{3} Mg.$$

Значит, пружинный динамометр покажет $1/3$ веса катушки. Отметим, что если вначале лента была расположена вертикально, то она все время остается вертикальной, так как на центр катушки не действуют никакие горизонтально направленные силы.

10. На вопрос о том, оторвется ли грузик от полусферы, можно ответить без всяких расчетов. Если бы грузик не отрывался от полусферы, то у ее основания он должен был бы иметь скорость, направленную вертикально вниз. Иначе говоря, в момент касания с подставкой, на которой установлена полусфера, горизонтальная составляющая скорости грузика должна была бы равняться нулю. В то же время при скольжении грузика по полусфере эта составляющая скорости не была равна нулю, и в нашей системе не действует никакая сила, которая могла бы уменьшить величину горизонтальной составляющей скорости грузика. Поэтому грузик должен обязательно оторваться от полусферы — вопрос только в том, на какой высоте.

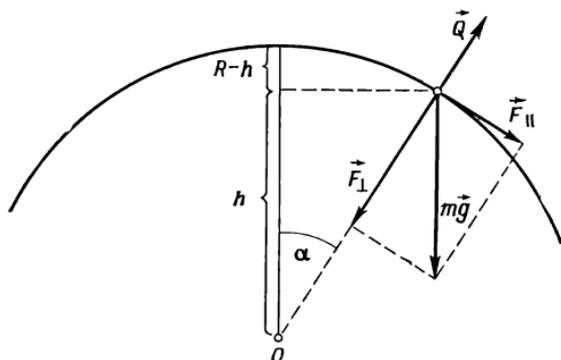


Рис. 133

Введем обозначения согласно рис. 133. Вес тела $m\vec{g}$ можно разложить на две составляющие: касательную и перпендикулярную к поверхности полусферы. Касательная составляющая

$$F_{\parallel} = mg \sin \alpha = mg \sqrt{1 - \left(\frac{h}{R}\right)^2}$$

сообщает грузику ускорение, приводящее к его движению по полусфере. Вместе с тем нормальная составляющая

$$F_{\perp} = mg \cos \alpha = mgh/R$$

частично уравнивает силу реакции поверхности полусферы, действующую на тело, а частично искривляет его траекторию. Следовательно, можно записать

$$ma_{\perp} = \frac{mv^2}{R} = F_{\perp} - Q,$$

где Q — сила реакции поверхности полусферы, а a_{\perp} — центростремительное ускорение, равное mv^2/R (v — скорость грузика). Записанное равенство справедливо до тех пор, пока грузик находится на поверхности полусферы. В момент отрыва сила реакции становится равной нулю. Обозначив высоту, на которой это произойдет, через h_0 , а скорость грузика в этот момент через v_0 , можно записать

$$mgh_0/R = mv_0^2/R, \text{ или } h_0g = v_0^2. \quad (1)$$

Скорость v_0 можно связать с h_0 и другим способом, а именно на основе закона сохранения механической энергии. В рассматриваемой системе полная механическая энергия грузика должна быть постоянной. Считая начальным положение грузика на вершине полусферы, а конечным — отрыв грузика от оболочки, получим

$$mg(R - h_0) = \frac{1}{2}mv_0^2, \text{ или } v_0^2 = 2g(R - h_0). \quad (2)$$

Подставляя значение v_0^2 из уравнения (2) в уравнение (1), получаем

$$h_0g = 2g(R - h_0),$$

откуда

$$h_0 = \frac{2}{3}R.$$

Таким образом, грузик оторвется на высоте $\frac{2}{3}R$, т. е. на высоте $\frac{2}{3}$ м.

Наличие трения приведет к смещению точки отрыва грузика вниз, ближе к подставке. Из-за рассеяния механической энергии (обусловленного трением) скорость шарика на рассчитанной нами высоте будет

меньше, чем она была бы в отсутствие трения. В частности, на высоте $\frac{2}{3}R$ грузик, движущийся с трением, будет иметь скорость меньшую, чем это требуется для его отрыва. Трение также оказывает влияние на начальную фазу движения. Если бы трения не было, то достаточно было бы грузик немного сместить с вершины, чтобы он стал двигаться самостоятельно; при наличии же трения для начала самостоятельного движения грузика его надо переместить с вершины на довольно значительное расстояние, величина которого зависит от коэффициента трения.

11. Прежде всего отметим, что если концы стержня все время перемещаются по взаимно перпендикулярным траекториям, то его центр перемещается по окружности, радиус которой равен половине длины стержня ($r = 10$ см), а ее центр лежит в точке, в которой вертикальная стенка пересекается с горизонтальным полом. На первый взгляд кажется, что траектория центра стержня должна быть вогнутой кривой, выпуклость которой обращена к полу, но это не так. Центр стержня должен двигаться по дуге, обращенной выпуклостью вверх.

Докажем это. Рассмотрим стержень AB , опирающийся на стену и пол так, как показано на рис. 134. Пусть точка S отмечает центр стержня. Проведем через точку S перпендикуляры к стене (SC) и к полу (SD). Четырехугольник $OCS D$ является прямоугольным, значит, его диагонали равны между собой: $CD = OS$. Треугольники ACS и OAB подобны, поскольку их соответствующие стороны параллельны. Отсюда следует, что точка C делит отрезок OA пополам. Аналогично можно доказать, что точка D делит пополам отрезок OB . Треугольники OCD и OAB подобны, поскольку они имеют общий угол, а соответствующие стороны, прилежащие к этому углу, пропорциональны. Следовательно,

$$\frac{CD}{AB} = \frac{OC}{OA}.$$

Поскольку $OC : OA = 1 : 2$, то $CD = AB/2$. Аналогично, поскольку $CD = OS$, то $OS = AB/2$.

Таким образом, мы доказали, что если стержень касается концами стены и пола, то расстояние от его

середины до точки O всегда равно половине длины стержня. Иными словами, если стержень не отрывается от стены, его середина перемещается по окружности с центром в точке O .

На рис. 135 показан стержень и действующие на него силы: \vec{F}_1 — сила реакции пола, действующая на стержень, \vec{F}_2 — сила реакции стены. Сила \vec{R} равна сумме сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 . Остальные обозначения не требуют разъяснений.

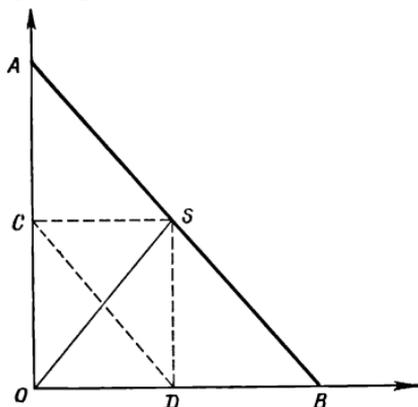


Рис. 134

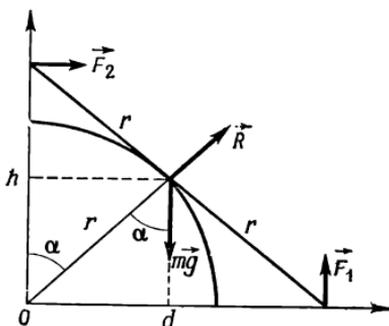


Рис. 135

Поскольку стержень считаем невесомым, его момент инерции относительно середины равен нулю. Тогда полный момент сил, действующих на стержень, должен равняться нулю. В противном случае стержень двигался бы относительно точки S с бесконечно большим угловым ускорением. Поскольку вращению стержня, скользящего концами по полу и стене, соответствует линейное ускорение его центра, перемещающегося по дуге, то бесконечному угловому ускорению должно было бы соответствовать бесконечное линейное ускорение материальной точки в центре стержня, а это невозможно, так как эта точка имеет определенную массу. Следовательно,

$$F_1 r \sin \alpha - F_2 r \cos \alpha = 0$$

и

$$\frac{F_2}{F_1} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Это означает, что сила $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ направлена вдоль радиуса окружности.

Поскольку стена и пол «отталкивают» стержень, а не притягивают, то сила \vec{R} всегда должна быть направлена от центра наружу. Рассмотрим теперь движение точки по окружности и определим положение, при котором сила \vec{R} становится равной нулю. Если бы движение центра стержня происходило по окружности, то, пройдя это положение ($R = 0$), сила \vec{R} должна была бы изменить свое направление, а это противоречит условию, что стена и пол могут «отталкивать» стержень, но не могут его «притягивать». Точка $R = 0$ — это такая точка, от которой центр стержня уже будет двигаться свободно: концы стержня не будут касаться пола и стены и силы реакции исчезнут.

Читатель, очевидно, заметил, что настоящая задача представляет собой как бы развитие идеи, рассмотренной в предыдущей задаче. Следовательно, мы можем воспользоваться сделанными ранее выводами. Поэтому, не доказывая заново, считаем, что стержень оторвется от стены, когда его середина будет находиться на высоте $2r/3$ над полом.

Дальше движение стержня происходит так, как если бы его бросили вниз под углом. В момент, когда центр стержня «отрывается» от окружности, его скорость равна

$$v_0 = \sqrt{2gr(1 - \cos \alpha)} = \sqrt{\frac{2}{3}gr}.$$

Эта скорость направлена по касательной к окружности. Ее горизонтальная и вертикальная составляющие соответственно равны

$$v_{\text{гор}} = \sqrt{\frac{2}{3}gr} \cos \alpha = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}gr},$$

$$v_{\text{верт}} = \sqrt{\frac{2}{3}gr} \sin \alpha = \frac{1}{3} \sqrt{5} \sqrt{\frac{2}{3}gr}.$$

Расстояние d в момент отрыва конца стержня от стены равно $r \sin \alpha$ или $\sqrt{5}r/3$. Ситуацию в момент, когда сила $R = 0$, т. е. когда центр стержня начинает двигаться как при броске вниз под углом, иллюстрирует

рис. 136. Пусть D — искомое расстояние центра стержня от стены в момент падения на пол, а t — продолжительность «броска под углом». Тогда имеем

$$h_0 = v_{\text{верт}}t + \frac{1}{2}gt^2 \quad (\text{движение по вертикали равномерно ускоренное}),$$

$$D = d + v_{\text{гор}}t \quad (\text{в горизонтальном направлении движение равномерное}).$$

Подставив в эти выражения найденные прежде значения h_0 , d , $v_{\text{гор}}$ и $v_{\text{верт}}$, получим систему двух уравнений с неизвестными D и t , являющимися функциями от r

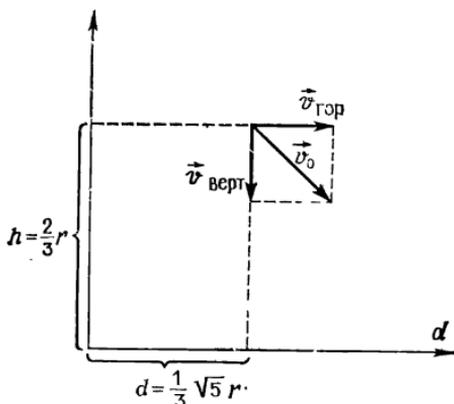


Рис. 136

и g . Из этой системы определим D и t . Необходимые несложные расчеты предоставляем читателю выполнить самостоятельно.

Очевидно, что полученная система уравнений имеет два решения. Одно из них дает $D < d$. Это решение отбрасываем, поскольку, как следует из условия задачи, центр стержня не может приближаться к стене. Остается второе решение: $D > d$. Рассчитаем численное значение

$$D = \frac{4\sqrt{23} + 5\sqrt{5}}{27} r \approx 12,5 \text{ см.}$$

Итак, в момент падения на пол центр стержня будет находиться на расстоянии 12,5 см от стены. Интересно, что величина D не зависит от ускорения свободного падения g (от g , однако, зависит момент отрыва и продолжительность движения).

Равновесие и устойчивость

1. Пусть человек находится на расстоянии x от левого конца балки (рис. 137), а сила, с которой человек натягивает веревку, равна T . Поскольку весом веревки можно пренебречь, то слева на нижний блок действует сила, равная по величине T . Давление, оказываемое человеком на балку, равно $Q - T$ (Q — вес

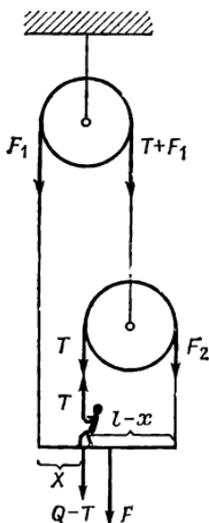


Рис. 137

человека). Силы P и $(Q - T)$ можно разложить на две составляющие: силу, действующую слева на верхний блок (F_1), и силу, действующую справа на нижний блок (F_2). Силы F_1 и F_2 определим, используя следующую систему уравнений:

$$F_1 + F_2 = P + (Q - T),$$

$$F_2(l - x) - F_1x = P \left(\frac{1}{2}l - x \right).$$

Первое из этих уравнений означает, что сумма сил F_1 и F_2 должна быть равна сумме сил P и $(Q - T)$. Второе же уравнение говорит о том, что момент сил P и $(Q - T)$ должен быть таким же, что и момент сил F_1 и F_2 . В этом уравнении записаны моменты сил, взятые относительно точки, где находится человек, но очевидно, что равенство моментов должно выполняться относительно любой точки системы.

Решая данную систему уравнений, получим

$$F_1 = \frac{P}{2} + (Q - T) \frac{l - x}{l},$$

$$F_2 = \frac{P}{2} + (Q - T) \frac{x}{l}.$$

В состоянии равновесия моменты сил, действующих на блоки, должны быть равны нулю. Это условие означает, что

$$T = F_2 \quad (\text{верхний блок}),$$

$$F_1 = T + F_2 \quad (\text{нижний блок}).$$

Подставив в последние соотношения найденные выше значения F_1 и F_2 , получим два уравнения с двумя неизвестными T и x . Решая эту систему, находим

$$x = \frac{P - Q}{P - 3Q}, \quad T = \frac{1}{4}(P + Q).$$

Подставив числовые значения величин, получим $x/l = 0,2$; $T = 222,7 \text{ Н}$ ¹.

2. Сила, действующая на проводник с током, всегда пропорциональна току, проходящему через проводник. Противоположные стороны рамки равны и параллельны и отличаются только направлением тока в них. Силы, действующие на них, равны по абсолютной величине, но противоположно направлены, поэтому они взаимно уничтожаются.

Следовательно, полная сила, действующая на рамку со стороны поля \vec{B} , равна нулю. Вследствие этого натяжение нити \vec{T} определяется только весом рамки $\vec{G} = mg$. Сила тяжести направлена вертикально вниз, а, значит, сила \vec{T} также должна быть направлена вертикально вниз. Сила \vec{T} всегда действует только вдоль нити, поэтому нить будет висеть вертикально независимо от того, течет через рамку ток или нет.

Представим себе теперь проводник с током. Пусть сила тока равна I , а длина проводника a . Поместим

¹ Этот результат может быть получен сразу. Очевидно, что $F_2 = T$ и $F_1 = 2T$, поэтому $P + Q = T + F_1 + F_2 = 4T$. — Прим. ред.

проводник в однородное магнитное поле \vec{B} так, чтобы силовые линии были перпендикулярны к проводнику (рис. 138). Сила, действующая на этот проводник, равна по величине $I\vec{B}a$ (в системе СИ). Если бы поле \vec{B} не было направлено перпендикулярно проводнику,

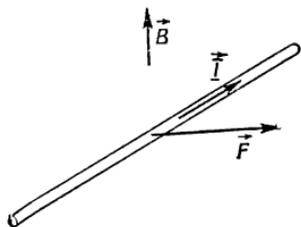


Рис. 138

то для нахождения величины силы следовало бы определить составляющую \vec{B}_\perp поля \vec{B} , перпендикулярную к проводнику, поскольку составляющая поля \vec{B}_\parallel ,

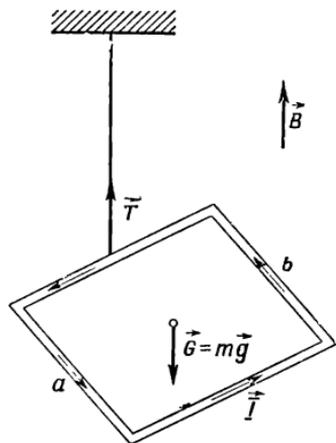


Рис. 139

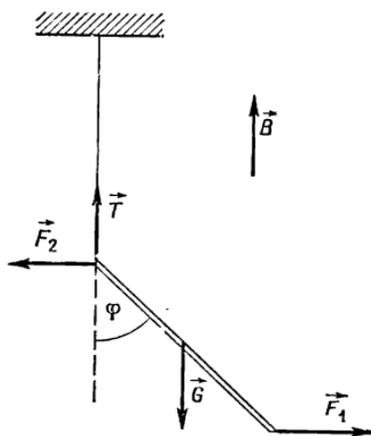


Рис. 140

параллельная проводнику, не оказывает воздействия на заряды, движущиеся вдоль него.

Рассмотрим ситуацию, показанную на рис. 139, когда рамка повернута вокруг горизонтально расположенной верхней стороны и отклонена от вертикали. Используя приведенные выше соображения, заметим, что суммарные силы и моменты сил (относительно цен-

тра рамки), действующие на стороны a и b , равны нулю.

Рассмотрим теперь рамку сбоку (рис. 140). Обозначим через φ угол, на который рамка отклонена от вертикали. Согласно вышеизложенному, на верхнюю и нижнюю стороны рамки действуют горизонтально направленные силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , по величине равные IBa и направленные так, как показано на рисунке.

В состоянии равновесия сумма всех сил, действующих на тело, и сумма моментов этих сил, взятых относительно любой точки, должны равняться нулю. Очевидно, что сумма всех сил, действующих на рамку, равняется нулю. Теперь перейдем к определению моментов.

Определим момент сил относительно точки, в которой к рамке прикреплена нить:

$$0 + 0 - \frac{a}{2} mg \sin \varphi + IBa^2 \cos \varphi = 0.$$

момент
силы \vec{T}
+
момент
силы \vec{F}_2
-
 $\frac{a}{2}$
момент
силы \vec{G}
+
 IBa^2
момент
силы \vec{F}_1

Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{2IBa}{mg}, \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{2IBa}{mg}. \end{aligned}$$

Значит, в состоянии равновесия рамка отклонена от вертикали на угол φ , определяемый последним равенством. Для малых токов I угол φ близок к нулю, но по мере увеличения тока он приближается к 90° . Иными словами, при слабых токах рамка будет висеть почти вертикально, при больших токах она займет почти горизонтальное положение.

3. Согласно условию задачи считаем, что вес лестницы пренебрежимо мал. Вес $\vec{Q} = m\vec{g}$ является векторной суммой двух сил: \vec{Q}_1 и \vec{Q}_2 (рис. 141). Поскольку система симметрична, то ограничимся рассмотрением только одной из них, например силы \vec{Q}_2 .

Силу \vec{Q}_2 можно разложить на две составляющие, как показано на рисунке. Очевидно, что¹

$$F_1 = \frac{1}{2} Q,$$

$$F_2 = F_1 \operatorname{tg} \alpha.$$

Сила \vec{F}_1 уравнивается силой реакции пола. Рассмотрим два случая:

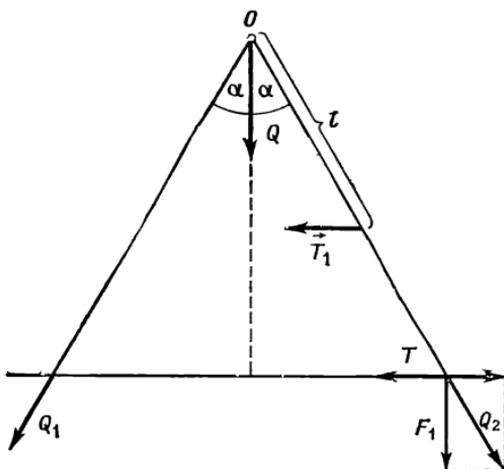


Рис. 141

а) F_2 не превышает максимального значения силы трения $T_{\max} = fF_1 = \frac{1}{2} fQ$. Это возможно при $f \geq \operatorname{tg} \alpha$. В этом случае сила трения T будет уравнивать силу F_2 независимо от величины Q . Увеличение Q не приводит к увеличению натяжения веревки. Значит, веревка никогда не разорвется.

б) F_2 больше, чем $T_{\max} = \frac{1}{2} fQ$. Это возможно при $f < \operatorname{tg} \alpha$. В этом случае результирующий момент сил F_2 и T_{\max} относительно точки O должен равняться моменту силы T_1 , натягивающей веревку. В противном случае стороны лестницы не были бы в равно-

¹ Силу Q_2 можно перенести из точки приложения O вдоль линии ее действия в точку касания лестницы с полом, не изменяя ее момента относительно точки O , равного нулю. — Прим. ред.

веса. Следовательно, имеем

$$T_1 l \cos \alpha = (F_2 - T_{\max}) 2l \cos \alpha.$$

Тогда

$$T_1 = (\operatorname{tg} \alpha - f) Q,$$

но, поскольку $T_1 \leq F$,

$$(\operatorname{tg} \alpha - f) Q \leq F,$$

или

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{F}{Q} + f.$$

Итак, если $\operatorname{tg} \alpha \leq (F/Q) + f$, то веревка не разорвется. Максимальная величина угла α , превышение которой приведет к разрыву веревки, следовательно, определяется равенством

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{Q} + f.$$

Подставляя числовые данные, получаем $\alpha = 38^\circ 25'$. Максимальный угол, на который можно раздвинуть лестницу, равен $2\alpha = 76^\circ 50'$.

4. Некоторое количество молекул хлора, соприкасаясь с поверхностью металла, вступают с ним в химическую реакцию. Эти столкновения не являются упругими, как это было бы в случае с химически нейтральным газом. При полностью неупругих столкновениях импульс, сообщаемый пластине при каждом столкновении с ней молекул газа, вдвое меньше, чем при упругом соударении. Это объясняется тем, что частица с импульсом mv не «отражается» от пластины с импульсом $-mv$, а остается на ней, приобретая импульс, равный нулю. Если бы все соударения молекул с пластиной были упругими, то давление хлора на металл было бы равно половине давления, действующего на стенки сосуда. Давление хлора на стенки сосуда обозначим через p . Очевидно, такое же давление оказывают молекулы хлора на пластину там, где она не покрыта металлом. Давление хлора на металл обозначим через p_1 . Тогда можем записать следующие равенства:

$$p = Pp + (1 - P)p,$$

$$p_1 = P \frac{1}{2} p + (1 - P)p.$$

Разность между давлением, оказываемым на сторону пластины, не покрытую металлом, и давлением на поверхность, покрытую металлом, равна

$$\Delta p = p - p_1 = \frac{1}{2} pP.$$

Из этого следует, что на каждый элемент пластины действует определенная сила избыточного давления Δp со стороны, не покрытой металлом (рис. 142).

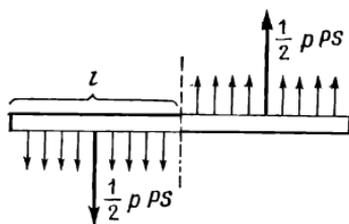


Рис. 142

Полная сила, действующая на пластину, очевидно, равна нулю. Вместе с тем момент сил отличен от нуля, и поэтому он стремится развернуть пластину в направлении против часовой стрелки.

Чтобы определить полный момент силы, следовало бы определить момент силы, действующей на малый элемент пластины и проинтегрировать его по всей ее поверхности. Однако, поскольку распределение сил в данном случае оказывается довольно простым, можно поступить проще, воспользовавшись хорошо известным правилом: при равномерном распределении сил вдоль стержня результирующий момент будет таким же, как если бы результирующая всех сил была приложена к середине стержня. Применив это правило для каждой из половинок пластины, получим, что полный момент силы, действующей на пластину, относительно ее середины равен

$$M = \frac{1}{2} pPb^2c,$$

где размеры b и c соответствуют рис. 25 в условии задачи.

Если бы на пластину не действовали никакие другие моменты сил, то она вращалась бы с определенным угловым ускорением. Чтобы установилось конечное равновесие, на пластину должны подействовать

моменты, направленные в противоположную сторону. Эти моменты могут быть обусловлены только воздействием нитей, на которых подвешена пластина. До тех пор пока пластина занимает нижнее положение, нити вертикальны, вертикально направлены и силы, с которыми на нее действуют нити. Момент этих сил равен нулю. При повороте пластины изменяется и направление нитей. Силы, уравнивающие вес пластины, создают теперь отличный от нуля момент, стремящийся повернуть пластину по часовой стрелке, причем этот момент увеличивается при возрастании угла поворота. В положении равновесия результирующий момент всех сил, действующих на пластину, должен равняться нулю. Иными словами, моменты сил, закручивающих пластину по часовой стрелке и против нее, должны быть одинаковыми.

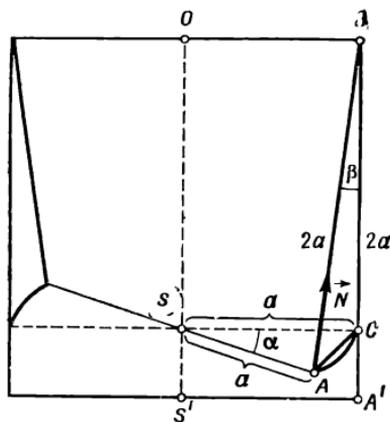


Рис. 143

Определим теперь момент сил натяжения нитей. Рассмотрим ситуацию, изображенную на рис. 143, где A' и A — положение точки, в которой нить прикреплена к пластине до и после ее поворота на угол α ; B — точка подвеса нити; S' и S — положение середины верхней стороны пластины до и после ее поворота на угол α ; N — сила натяжения нити.

На рисунке отображен тот факт, что в силу симметричности движения вращающейся пластины ее середина будет двигаться по вертикали, проходящей через середину отрезка, соединяющего точки подвеса нитей.

Из равнобедренного треугольника ASC имеем

$$AC = 2a \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника ABC находим зависимость

$$\sin \beta = \frac{AC}{AB} = \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \text{или} \quad \beta = \frac{\alpha}{2}.$$

Зависимость между β и α довольно проста благодаря удачному выбору соотношения длины нитей и расстояния между точками их подвеса. В общем случае подобная зависимость несколько сложнее, но лишь для расчета, а не с физической точки зрения.

Вертикальная составляющая натяжения каждой нити равна $N \cos \beta$ и должна равняться половине веса пластины:

$$N \cos \beta = \frac{1}{2} mg.$$

Величина горизонтальной составляющей, которая направлена вдоль стороны AC , равна $N \sin \beta$. Момент ее относительно середины стороны пластины равен, следовательно, произведению $N \sin \beta$ на высоту треугольника ASC , т. е. на $a \cos \alpha/2$. Момент, стремящийся повернуть пластину по часовой стрелке, со стороны обеих нитей равен

$$M' = 2N \sin \beta a \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Но $N = mg/2 \cos \beta$, поэтому

$$M' = 2 \frac{mg}{2 \cos \beta} \sin \beta a \cos \frac{\alpha}{2} = mga \sin \beta = mga \sin \frac{\alpha}{2}.$$

В состоянии равновесия должно выполняться равенство

$$M = M'.$$

После небольших преобразований получаем

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{pPb^2c}{2mga}.$$

Чтобы это выражение имело смысл, должно выполняться условие

$$\frac{pPb^2c}{2mga} \leq 1.$$

В противном случае состояние равновесия не будет достигнуто — пластина либо будет вращаться на перекрученных нитях, либо нити слишком сильно натянутся и оборвутся (при $\beta \rightarrow 90^\circ$ натяжение $N \rightarrow \infty$).

Эту задачу можно решить другим способом, учитывая изменение потенциальной энергии системы. Из рис. 143 видно, что высота, на которую поднимется пластина при повороте на угол α , равна

$$SS' = A'C = 2a(1 - \cos \beta) = 2a \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right).$$

Если потенциальную энергию пластины $E_{п1}$, связанную с силой тяжести, измерять относительно ее нижнего положения, то можно записать

$$E_{п1} = 2mga \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right).$$

Кроме силы тяжести на пластину действует еще момент силы давления M , с которым также можно связать некоторую потенциальную энергию $E_{п2}$, определяемую как работу сил, необходимую для уравновешивания этого момента и поворота пластины (при условии, что нет других сил и моментов сил). Поскольку момент M действует в том же направлении, в котором отсчитываем угол α , то приложенная пара сил должна выполнять отрицательную работу. При повороте на угол α каждая из точек приложения равнодействующих сил давления переместится на $b\alpha/2$, а, значит, работа пары сил будет равна

$$E_{п2} = -2 \frac{b}{2} \alpha \cdot \frac{1}{2} pPbc = -M\alpha.$$

Полная потенциальная энергия пластины, повернутой на угол α , равна

$$E_{п} = E_{п1} + E_{п2}.$$

В состоянии равновесия потенциальная энергия механической системы имеет экстремум, а, значит,

$$\frac{d}{d\alpha} E_{п} = 0.$$

Продифференцировав выражение для полной потенциальной энергии $E_{п}$ по α , получаем

$$mga \sin \frac{\alpha}{2} - M = 0.$$

Это равенство равнозначно рассмотренному выше равенству моментов сил.

5. Пусть l_1 и l_2 — длины пружин в состоянии равновесия при угловой скорости системы, равной ω . Индекс 1 присвоим пружине, которая ближе к оси вращения, а индекс 2 — внешней пружине.

Поскольку в состоянии равновесия грузики движутся по окружностям, то на внешний грузик должна действовать центробежная сила, равная $m\omega^2(l_1 + l_2)$, а на внутренний — $m\omega^2 l_1$.

Центробежная сила, действующая на внешний грузик, — это сила упругости внешней пружины

$$k(l_2 - l_0) = m\omega^2(l_1 + l_2).$$

В то же время центробежная сила, действующая на первый грузик, является равнодействующей сил, с которыми обе пружины действуют на грузик. Учитывая направления этих сил, можно записать

$$k(l_1 - l_0) - k(l_2 - l_0) = m\omega^2 l_1.$$

Итак, мы получили два уравнения, из которых можно определить l_1 и l_2 :

$$l_1 = l_0 \frac{1}{x^2 - 3x + 1},$$

$$l_2 = l_0 \frac{1 - x}{x^2 - 3x + 1} = (1 - x) l_1,$$

где через x обозначена величина $m\omega^2/k$. Для $\omega_0 = 0$ состоянию равновесия соответствует $l_1 = l_2 = l_0$.

Отметим, что в полученных выражениях для l_1 и l_2 знаменатель может оказаться равным нулю. Это возможно при двух значениях x :

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Легко видеть, что если x будет изменяться от нуля до x_1 , то длины пружин будут монотонно возрастать от l_0 до бесконечности. Значит, физический смысл имеют только те значения ω , при которых $x < x_1$, т. е. те, которые определяются зависимостью

$$\omega < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} (\sqrt{5} - 1).$$

Читатель без труда может убедиться, что при $x > x_1$ по крайней мере одна из величин, l_1 или l_2 , имеет отрицательное значение, что не соответствует условию задачи.

Определим теперь, какую минимальную работу требуется совершить, чтобы раскрутить систему от $\omega_0 = 0$ до скорости ω . Для этого определим полную начальную и конечную энергию системы.

При $\omega_0 = 0$ полная энергия равна нулю, поскольку пружины не растянуты и грузики неподвижны.

Кинетическая энергия грузиков, вращающихся со скоростью ω , равна

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} m l_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m (l_1 + l_2)^2 \omega^2 = \\ &= \frac{1}{2} m \omega^2 [l_1^2 + (l_1 + l_2)^2]. \end{aligned}$$

В то же время потенциальная энергия растянутых пружин равна

$$E_n = \frac{1}{2} k (l_1 - l_0)^2 + \frac{1}{2} k (l_2 - l_0)^2.$$

Полная энергия системы, вращающейся со скоростью ω , следовательно, равна

$$\begin{aligned} E = E_k + E_n &= \frac{1}{2} m \omega^2 [l_1^2 + (l_1 + l_2)^2] + \\ &+ \frac{1}{2} k [(l_1 - l_0)^2 + (l_2 - l_0)^2]. \end{aligned}$$

Зная, что

$$l_2 = (1 - x) l_1 = l_0 \frac{1 - x}{x^2 - 3x + 1},$$

где $x = m\omega^2/k$, после несложных алгебраических преобразований получим

$$E = \frac{1}{2} k l_0 \frac{x(2x^3 - 9x^2 + 9x + 5)}{(x^2 - 3x + 1)^2}.$$

Работа, которую требуется совершить, чтобы раскрутить систему, не может быть меньше, чем разность начальной и конечной полной энергии. Поскольку начальная полная энергия равна нулю, то минимальная работа должна быть равна E . Отметим, что эта ра-

бота при стремлении ω к некоторому предельному значению ω_1 (при $x \rightarrow x_1$) стремится к бесконечности.

6. Величины давления N_1 и N_2 относятся к состоянию равновесия. Значит, следует прежде всего подробно исследовать это состояние. Пусть центр сферы, образующей сосуд, лежит в точке O , а тело находится в точке A (рис. 144). Ось вращения (обозначена пунктирной линией) сферы проходит через точку O . Для

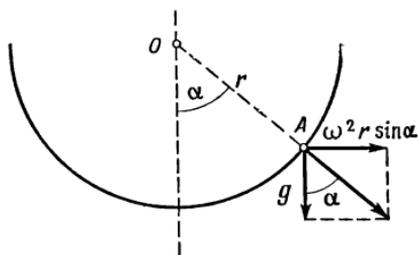


Рис. 144

описания состояния равновесия удобно использовать угол α , образованный радиусом, проведенным в точку A , и осью вращения. Очевидно, $0 \leq \alpha \leq \pi/2$.

В состоянии равновесия во вращающейся системе результирующее ускорение, равное сумме ускорения свободного падения и центробежного ускорения, должно быть направлено перпендикулярно к поверхности сосуда, т. е. по радиусу OA . Если угловую скорость вращения сосуда и тела обозначить через ω , то в состоянии равновесия должно быть справедливо уравнение

$$\operatorname{tg} \alpha_p = \frac{\omega^2 r \sin \alpha_p}{g}, \quad \text{или} \quad \sin \alpha_p \left(\frac{1}{\cos \alpha_p} - \frac{\omega^2 r}{g} \right) = 0,$$

где α_p — величина угла α в состоянии равновесия.

Это равенство выполняется в том случае, когда первый или второй множитель равен нулю. Рассмотрим оба случая:

а) $\sin \alpha_p = 0$, или $\alpha_p = 0$.

В этом случае тело находится на дне сосуда, и давление, оказываемое им на стенку сосуда, равно его весу:

б) $\cos \alpha_p = \frac{g}{\omega^2 r}$, или $\alpha_p = \arccos \frac{g}{\omega^2 r}$.

Это равенство справедливо только при $g/\omega^2 r \leq 1$, или $\omega \geq \omega_p = \sqrt{g/r}$. Подставив числовые значения g и r , найдем $\omega_p = 10$ рад/с. Согласно условию задачи, $\omega_1 < \omega_p$. Это означает, что вначале тело покоилось на дне сосуда. Его вес равен тогда N_1 , а масса $m = N_1/g$.

Определим теперь скорость ω_2 , при которой давление тела на стенку сосуда будет равно N_2 . Ясно, что ω_2 должно быть больше ω_p . Если тело в точке A находится в состоянии равновесия, то

$$\frac{rm\omega_2^2 \cdot \sin \alpha_A}{N_2} = \sin \alpha_A,$$

где $m = N_1/g$. Отсюда находим

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{N_2}{N_1} \frac{g}{r}} = \sqrt{\frac{N_2}{N_1}} \omega_p = 20 \text{ рад/с.}$$

При решении данной задачи и ей подобных часто допускают ошибку, деля обе части уравнения, определяющего α_p на $\sin \alpha_p$, тогда уравнение приобретает вид

$$\cos \alpha_p = \frac{g}{\omega^2 r}.$$

Подставив в это соотношение численные значения величин, получим $\cos \alpha_p = 4 > 1$, что невозможно. Следует помнить, что нельзя делить на величину, которая может равняться нулю.

Теперь решим эту задачу, используя закон сохранения энергии. В системе отсчета, вращающейся вместе с сосудом, тело покоится. Для определения полной потенциальной энергии тела нужно рассмотреть две силы: силу тяжести и центробежную силу. (Если бы тело не покоилось, то на него кроме центробежной силы действовали бы и другие силы инерции, например сила Кориолиса, которая не является потенциальной.) Вернемся к рис. 144. Построим систему координат таким образом, чтобы направленная вверх ось z совпадала с осью вращения, а горизонтальная ось x вращалась, проходя через нижнюю точку сосуда. Угловую скорость вращения сосуда, как и прежде, обозначим через ω . Пусть тело, находящееся в точке A ,

имеет координаты x и z . Очевидно, что

$$\begin{aligned}x &= r \cdot \sin \alpha, \\z &= r(1 - \cos \alpha).\end{aligned}$$

Потенциальную энергию будем измерять относительно дна сосуда. Тогда потенциальная энергия тела, находящегося в точке A , обусловленная силой тяжести, равна

$$E_g = mgz.$$

Потенциальная энергия тела, обусловленная центробежной силой, равна

$$E_0 = -\frac{1}{2} \omega^2 x^2 m.$$

Следует обратить внимание на знак «—» в последнем равенстве. Этот знак говорит о том, что чем дальше от оси вращения находится тело, тем меньше его потенциальная энергия в поле центробежных сил.

Как известно, если тело находится под воздействием нескольких полей (в нашем случае это поле гравитации и поле центробежной силы), то его полная потенциальная энергия равна сумме потенциальных энергий этих полей. Следовательно, полная потенциальная энергия тела относительно дна сосуда равна

$$E_{\pi} = mgz - \frac{1}{2} m\omega^2 x^2,$$

или

$$E_{\pi} = mgr(1 - \cos \alpha) - \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 \sin^2 \alpha.$$

Найдем экстремум функции $E_{\pi}(\alpha)$:

$$\begin{aligned}\frac{dE_{\pi}}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_p} &= 0, \\mgr \sin \alpha_p - m\omega^2 r^2 \sin \alpha_p \cos \alpha_p &= 0, \\ \sin \alpha_p \left(\frac{g}{\omega^2 r} - \cos \alpha_p \right) &= 0.\end{aligned}$$

Это уравнение равносильно тому, которое было получено нами при анализе сил. Следовательно, нет необходимости производить дальнейшие вычисления.

То, что мы отсчитывали потенциальную энергию относительно дна сосуда, не имеет принципиального

значения. Можно было бы рассматривать ее и относительно любой другой точки. Тогда выражение, стоящее в правой части уравнения для $E_{\text{п}}$, отличалось бы от приведенного здесь на некоторую постоянную, производная от которой равна нулю.

7. Используя обозначения, принятые на рис. 145, определим полную потенциальную энергию маятника относительно положения, в котором маятник висит

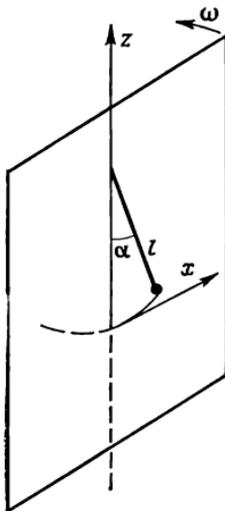


Рис. 145

вертикально вдоль оси вращения. Учитывая замечание, сделанное при решении предыдущей задачи, эта энергия равна

$$E_{\text{п}} = mgl(1 - \cos \alpha) - \frac{1}{2} m\omega^2 l^2 \sin^2 \alpha.$$

В состоянии равновесия при $\alpha = \alpha_{\text{p}}$

$$\left. \frac{dE_{\text{п}}}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_{\text{p}}} = 0,$$

$$mgl \sin \alpha_{\text{p}} - m\omega^2 l^2 \sin \alpha_{\text{p}} \cos \alpha_{\text{p}} = 0,$$

$$\sin \alpha_{\text{p}} \left(\frac{g}{\omega^2 l} - \cos \alpha_{\text{p}} \right) = 0.$$

Мы получили то же самое уравнение, что и в предыдущей задаче. В этом нет ничего удивительного, поскольку в обеих этих задачах по-разному реализуется

одна и та же физическая идея. Следовательно, можно сразу сформулировать выводы:

1) при угловой скорости $0 \leq \omega_p \leq \sqrt{g/l}$ имеется только одно положение равновесия $\alpha_p = 0$;

2) при скорости $\omega > \omega_p = \sqrt{g/l}$ существует два положения равновесия: $\alpha_p = 0$ и $\alpha_p = \arccos g/(\omega^2 l)$.

Отметим, что величина ω_p равна частоте колебаний свободного маятника.

Рассмотрим теперь вид равновесия. Как известно, в состоянии неустойчивого равновесия система обладает максимальной потенциальной энергией, а в состоянии устойчивого равновесия — минимальной. Значит, мы должны определить, имеет ли энергия минимум или максимум при $\alpha = \alpha_p$. Вторая производная $E_n(\alpha)$ по α при $\alpha = \alpha_p$ равна

$$\begin{aligned} mgl \cos \alpha_p - m\omega^2 l^2 \cos^2 \alpha_p + m\omega^2 l^2 \sin^2 \alpha_p &= \\ &= m\omega^2 l^2 + mgl \cos \alpha_p - 2m\omega^2 l^2 \cos^2 \alpha_p. \end{aligned}$$

Так как $\cos \alpha_p = g/(\omega^2 l) \leq 1$, то при $\omega > \omega_p$ это выражение больше нуля. Это означает, что положение равновесия является устойчивым. При $\alpha_p = 0$ вторая производная $E_n(\alpha)$ по α равна

$$m\omega^2 l^2 + mgl - 2m\omega^2 l^2 = mgl - m\omega^2 l^2 = ml \left(\frac{g}{l} - \omega^2 \right).$$

Эта величина при $\omega < \omega_p$ будет положительной, а при $\omega > \omega_p$ — отрицательной. Следовательно, вертикальное положение маятника при $\omega < \omega_p$ является положением устойчивого равновесия, а при $\omega > \omega_p$ — положением неустойчивого равновесия. Исследование равновесия при $\omega = \omega_p$ требует анализа высших производных. Это не так сложно, и читатель без особых затруднений может сам выполнить соответствующие вычисления.

8. Эту задачу можно решать как в инерциальной системе отсчета, так и в неинерциальной, вращающейся вместе с шариком вокруг стержня. Рассмотрим решения в обеих системах. Очевидно, что в неподвижном лифте шарик двигался по окружности. Определим период T этого движения.

Сначала рассмотрим движение шарика в инерциальной системе (рис. 146). На тело, движущееся по

окружности, действует центростремительная сила, направленная к центру окружности. В данном случае эта сила \vec{F} , равная равнодействующей двух сил: натяжения нити \vec{N} и силы тяжести $m\vec{g}$ и направленная перпендикулярно $m\vec{g}$.

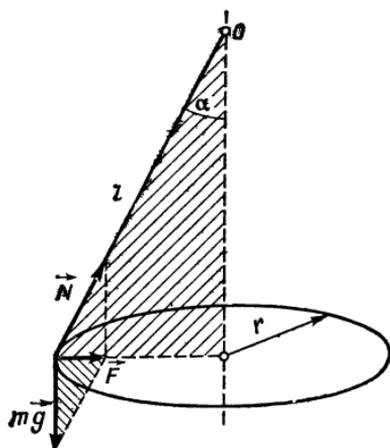


Рис. 146

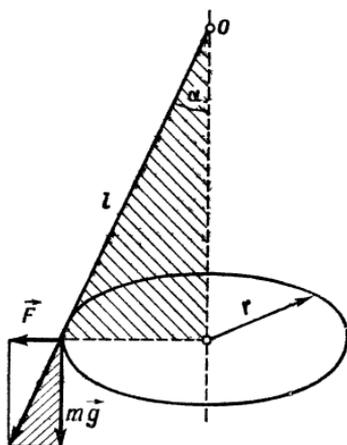


Рис. 147

пендикулярно $m\vec{g}$. Из подобия треугольников на рис. 146 находим

$$\frac{F}{mg} = \frac{r}{\sqrt{l^2 - r^2}}, \quad \text{или} \quad F = \frac{mgr}{\sqrt{l^2 - r^2}}.$$

Как известно,

$$F = m \frac{v^2}{r},$$

где v — скорость тела при движении по окружности. Значит,

$$\frac{v^2}{r} = \frac{gr}{\sqrt{l^2 - r^2}}.$$

После преобразований получаем

$$v = r\sqrt{g/\sqrt{l^2 - r^2}}.$$

Период T определим, используя равенство $v = 2\pi(r/T)$:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\sqrt{l^2 - r^2}}{g}}.$$

Определим также натяжение нити N . Из подобия заштрихованных треугольников на рис. 147 имеем

$$\frac{N}{mg} = \frac{l}{\sqrt{l^2 - r^2}}, \quad \text{т. е.} \quad N = \frac{mgl}{\sqrt{l^2 - r^2}}.$$

Теперь проанализируем полученные результаты. Если угол $\alpha \rightarrow \pi/2$, т. е. $r \rightarrow l$, то скорость v и натяжение нити N стремятся к бесконечности, а период T уменьшается, стремясь к нулю. Если $\alpha \rightarrow 0$, т. е. $r \rightarrow 0$, то скорость $v \rightarrow r \sqrt{g/l}$, период стремится к периоду колебаний математического маятника $2\pi \sqrt{l/g}$, а натяжение нити стремится к весу груза.

Во вращающейся системе отсчета (см. рис. 147) результирующая центробежной силы \vec{F} и силы тяжести mg должна быть направлена вдоль нити. В противном случае относительно точки O действовал бы некоторый отличный от нуля момент силы и движение по окружности не было бы равномерным, что противоречит условию задачи. Из подобия заштрихованных треугольников на рис. 147 имеем

$$\frac{F}{mg} = \frac{r}{\sqrt{l^2 - r^2}}.$$

Дальше задача решается, как и в предыдущем случае (в инерциальной системе).

До сих пор мы рассматривали маятник, находящийся в неподвижном лифте. Теперь посмотрим, что произойдет, если лифт начнет свободно падать с ускорением g . В момент начала падения в системе отсчета, движущейся вместе с лифтом, на шарик начинает действовать сила инерции, равная по величине mg и направленная вверх. Эта сила компенсирует силу тяжести. В результате на шарик действует только сила натяжения нити, которая обусловлена упругими свойствами нити и, следовательно, не перестает действовать в состоянии невесомости.

В момент начала падения лифта скорость шарика v не изменяется ни по величине, ни по направлению. Сила натяжения нити действует вдоль нити и направлена к точке подвеса. Значит, шарик будет вращаться по окружности, радиус которой равен длине нити l , а центр находится в точке подвеса нити. Роль центро-

стремительной силы теперь играет сила натяжения нити N_1 , равная

$$N_1 = \frac{mv^2}{l} = \frac{mr^2g}{l\sqrt{l^2 - r^2}} = N \frac{r^2}{l^2} = N \sin^2 \alpha.$$

Период вращения маятника во время падения лифта, очевидно, равен

$$T_1 = \frac{2\pi l}{v} = \frac{T}{\sin \alpha}.$$

Траектории движения шарика до и во время падения лифта представлены на рис. 148.

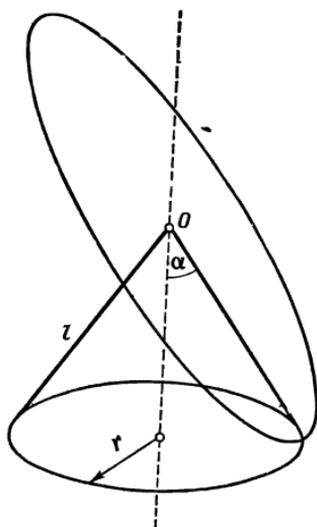


Рис. 148

9. На рис. 149 показаны все силы, действующие на валики. На верхний валик действуют: сила тяжести P , две равные по величине силы реакции со стороны нижних валиков P_1 и две силы трения, каждая из которых равна T_1 . На каждый из нижних валиков действуют: сила тяжести P , реакция опоры P_2 , сила трения о пол T_2 и сила трения с верхним валиком $T'_1 = T_1$.

В состоянии равновесия геометрическая сумма всех сил, а также сумма моментов сил, действующих на каждый из валиков, должна быть равна нулю.

Следовательно, можно записать следующие равенства:

$$2 \left(P_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} T_1 \right) - P = 0 \quad \text{(сумма вертикальных составляющих сил, действующих на верхний валик),}$$

$$P + \frac{\sqrt{3}}{2} P_1 + \frac{1}{2} T_1 - P_2 = 0 \quad \text{(аналогичная сумма для одного из нижних валиков),}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} T_1 + T_2 - \frac{1}{2} P_1 = 0 \quad \text{(сумма горизонтальных составляющих сил, действующих на один из нижних валиков),}$$

$$T_1 - T_2 = 0 \quad \text{(что следует из суммы моментов для одного из нижних валиков).}$$

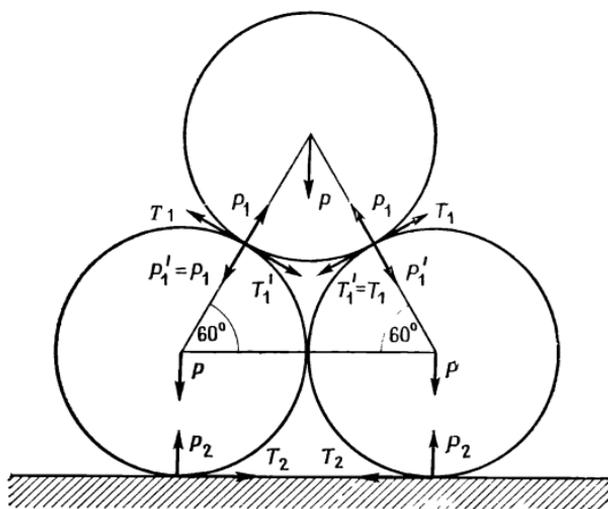


Рис. 149

Силы P_1 и T_1 приложены к верхнему валику. Силы P_1' и T_1' приложены к нижнему валику.

Сумма горизонтальных составляющих сил, действующих на верхний валик, и результирующий момент сил, действующих на этот валик, равны нулю в силу симметрии.

Из полученных уравнений можем определить T_1 , T_2 , P_1 , P_2 в зависимости от P . Выполнив соответствующие преобразования, получим

$$P_2 = \frac{3}{2} P, \quad P_1 = \frac{1}{2} P, \quad T_1 = T_2 = \frac{P}{2(2 + \sqrt{3})}.$$

Поскольку значения сил трения известны, то получаем

$$T_2 \leq P_2 f, \quad T_1 \leq P_1 h.$$

Тогда

$$f \geq \frac{1}{3(2 + \sqrt{3})}, \quad h \geq \frac{1}{2 + \sqrt{3}}.$$

10. Рассмотрим неинерциальную систему, вращающуюся вместе с диском, в которой на стержень действует центробежная сила инерции.

В состоянии равновесия горизонтальная сила, уравновешиваемая силой трения, является результирующей центробежной силы, действующей на стержень, и силы натяжения нити, равной по величине $P = mg$. Чтобы равновесие было возможно, отношение горизонтальной силы к силе нормального давления не должно превышать по величине коэффициента трения. Иными словами, величина горизонтальной силы не может превышать максимального значения силы трения, равного fMg .

Определим центробежную силу, действующую на стержень. Масса единицы длины стержня равна

$$\rho = \frac{M}{d}.$$

На элемент стержня длиной dx , находящийся на расстоянии x от оси вращения, действует центробежная сила

$$dF = \frac{M}{d} \omega^2 x dx.$$

Центробежная сила, действующая на весь стержень, равна интегралу

$$\begin{aligned} F &= \int dF = \int_r^{r+d} \frac{M}{d} \omega^2 x dx = \frac{M}{d} \omega^2 \int_r^{r+d} x dx = \\ &= \frac{M}{2d} \omega^2 [(r+d)^2 - r^2] = \frac{1}{2} M \omega^2 (2r + d). \end{aligned}$$

Согласно сделанным выше замечаниям, должно выполняться неравенство

$$\left| \frac{1}{2} M\omega^2 (2r + d) - mg \right| \leq fMg.$$

Так как в левой части этого неравенства стоит абсолютная величина, то оно равносильно двум следующим неравенствам:

$$\frac{1}{2} M\omega^2 (2r + d) - mg \leq fMg,$$

$$mg - \frac{1}{2} M\omega^2 (2r + d) \leq fMg,$$

при дополнительном условии $r \geq 0$.

Из первого неравенства получаем

$$r \leq \frac{fMg + mg}{M\omega^2} - \frac{d}{2}.$$

Из второго

$$r \geq \frac{mg - fMg}{M\omega^2} - \frac{d}{2}.$$

Следовательно,

$$r_{\max} = \frac{mg}{M\omega^2} + \frac{fg}{\omega^2} - \frac{d}{2},$$

$$r_{\min} = \max \left(0, \frac{mg}{M\omega^2} - \frac{fg}{\omega^2} - \frac{d}{2} \right).$$

Чтобы полученное решение имело смысл, должно выполняться условие $r_{\max} \geq 0$:

$$\frac{mg}{M\omega^2} + \frac{fg}{\omega^2} - \frac{d}{2} \geq 0,$$

т. е.

$$\omega \leq \omega_{\max} = \sqrt{\frac{2(mg + fMg)}{Md}}.$$

Для угловых скоростей ω , превышающих ω_{\max} , состояние равновесия в рассматриваемой системе невозможно.

11. Сначала рассмотрим случай, когда трение отсутствует. Искомое расстояние от положения равновесия грузика до вершины воронки обозначим через l_0 . Рассмотрим систему отсчета, вращающуюся вместе с воронкой. Предположим, что грузик расположен в воронке так, что его скорость относительно воронки

равна нулю. В состоянии равновесия составляющая силы тяжести, направленная к вершине воронки, должна уравниваться составляющей центробежной силы, параллельной образующей воронки. Угол при вершине воронки равен 2α . Тогда можно записать

$$mg \cos \alpha = m\omega^2 l_0 \sin^2 \alpha,$$

где m — масса грузика. Отсюда

$$l_0 = \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}.$$

Подставляя числовые данные ($\alpha = 60^\circ$), получаем $l_0 = 4,1$ см. Исследуем вид равновесия. Приближение грузика к вершине воронки приведет к тому, что составляющая силы тяжести превысит уравнивающую ее составляющую центробежной силы. И наоборот, если грузик удалится от вершины воронки, составляющая центробежной силы превысит составляющую силы тяжести. В обоих случаях смещение грузика от положения равновесия приводит к появлению результирующей силы, увеличивающей это смещение. Это означает, что положение равновесия неустойчиво.

Рассмотрим теперь случай, когда между телом и поверхностью воронки существует трение; коэффициент трения равен f . В этом случае к названным ранее двум силам, параллельным образующей воронки, прибавляется еще сила трения. Условие равновесия найдем, считая, что результирующая первых двух составляющих меньше или равна максимальной величине силы трения, которая в свою очередь равна произведению коэффициента трения на силу нормального давления, оказываемого грузиком на стенку воронки. Сила нормального давления равна сумме составляющих силы тяжести и центробежной силы, перпендикулярных к образующей воронки. После несложных алгебраических преобразований получаем

$$|mg \cos \alpha - m\omega^2 l_0 \sin^2 \alpha| \leq f (mg \sin \alpha + m\omega^2 l_0 \sin \alpha \cos \alpha).$$

Исследование полученного неравенства и определение допустимых пределов изменения величины l_0 , при котором грузик будет находиться в состоянии равновесия, предоставим читателю.

12. Центростремительная сила, обуславливающая движение по окружности, в данном случае является результирующей сил, с которыми электрическое и магнитное поле воздействуют на движущийся точечный заряд. Из соображений симметрии ясно, что точка, в которой находятся неподвижный электрический заряд и полюс магнита, лежит на оси симметрии орбиты (рис. 150, а).

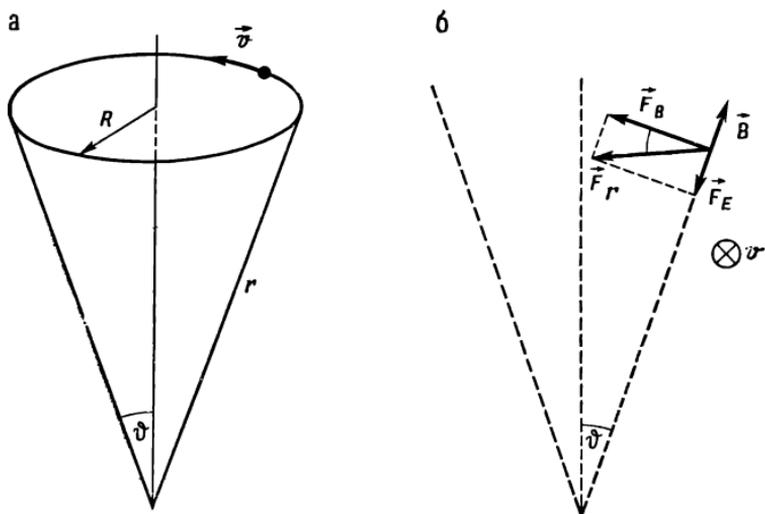


Рис. 150

На рис. 150, б обозначены направление движения заряда, направление поля \vec{B} и направления сил, с которыми электрическое и магнитное поля воздействуют на движущийся положительный заряд. Отметим, что если бы направление скорости \vec{v} было противоположно, то движение не могло бы происходить таким образом, как показано на рис. 150, а.

Силы \vec{F}_E и \vec{F}_B имеют следующие значения:

$$F_E = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad F_B = evB = ev \frac{\alpha}{r^2}.$$

Центростремительная сила \vec{F}_r является результирующей сил \vec{F}_E и \vec{F}_B . Она должна быть направлена перпендикулярно к оси симметрии орбиты. Отсюда

следует, что

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{F_B}{F_E} = \frac{\alpha v 4\pi \epsilon_0}{e}.$$

Тогда

$$v = \frac{e}{4\pi \epsilon_0 \alpha} \operatorname{ctg} \theta.$$

Кроме того, имеет место соотношение

$$F_r = F_B \cos \theta + F_E \sin \theta.$$

Поскольку $F_r = mv^2/R$, то последнее равенство можно записать следующим образом:

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{ev\alpha}{r^2} \cos \theta + \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r^2} \sin \theta.$$

Подставляя значение v и используя зависимость $\sin \theta = R/r$, находим радиус орбиты, по которой движется заряд:

$$R = \frac{4\pi \epsilon_0 \alpha^2}{m} \cdot \frac{\sin^3 \theta}{\cos^2 \theta}.$$

Полученное выражение вообще не содержит величины заряда e . Но это не должно нас удивлять. Действительно, в выражение, определяющее радиус орбиты, заряд не входит, но скорость v заряда зависит от его величины.

13. На винт действуют следующие силы: сила реакции N — на верхнюю часть головки винта, сила реакции N' — на нижнюю часть винта и нагрузка P

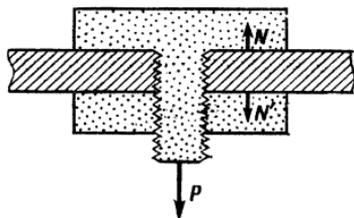


Рис. 151

(рис. 151). Силой тяжести можно пренебречь, поскольку в действительности нагрузки, прикладываемые к винту, обычно гораздо больше его веса.

Под действием приложенной силы материал подвергается некоторой деформации. По условию задачи

размеры головки винта и гайки много больше по сравнению с диаметром собственно винтовой части. Нагрузка, приходящаяся на единицу поверхности головки винта, гайки и пластины, значительно меньше напряжения, действующего на единицу площади поперечного сечения стержня винта. Следовательно, деформация этих элементов должна быть намного меньше, чем деформация стержня. Поэтому приближенно можно считать, что деформируется только стержень, а остальные элементы являются абсолютно жесткими. Будем также считать, что в рассматриваемых пределах деформации стержень винта подчиняется закону Гука и что его коэффициент упругости равен k .

Согласно сказанному, удлинение стержня до приложения нагрузки было равно $\Delta x_0 = N_0/k$.

Учитывая сделанные допущения, можно сформулировать следующие условия, которые должны выполняться в рассматриваемой системе:

а) удлинение стержня винта не может быть меньше Δx_0 , что обусловлено жесткостью гайки, головки и пластины: $\Delta x \geq \Delta x_0$;

б) сила N' может быть направлена только таким образом, как показано на рисунке, поскольку пластина не может притягивать гайку: $N' \geq 0$;

в) если $\Delta x > \Delta x_0$, то $N' = 0$. Иными словами, сила реакции N' исчезает, если при удлинении стержня больше, чем Δx_0 , гайка перестает касаться пластины;

г) $N = N' + P$, поскольку винт находится в состоянии равновесия.

Определим теперь зависимость $N(P)$. Сначала рассмотрим случай, когда $0 \leq P \leq N_0$:

$$N' = N - P = k \Delta x - P$$

и

$$N = k \Delta x \geq k \Delta x_0 = N_0.$$

Значит,

$$N' = N - P \geq N_0 - P > 0.$$

Согласно условию (в) должно выполняться соотношение

$$\Delta x = \Delta x_0.$$

Мы видим, что пока нагрузка не достигает значения N_0 , стержень винта не подвергается дальнейшему рас-

тяжению. Это значит, что в рассматриваемом случае давление N постоянно и равно N_0 .

Теперь обратимся к случаю, когда $P > N_0$:

$$N = P + N' \geq P > N_0,$$

а, значит,

$$\Delta x > \Delta x_0.$$

Поэтому $N' = 0$ и $N = P$.

Зависимость $N(P)$ показана на рис. 152.

14. При $\omega = 0$ система будет находиться в равновесии в том и только том случае, когда сила, действующая на каждый из зарядов со стороны всех

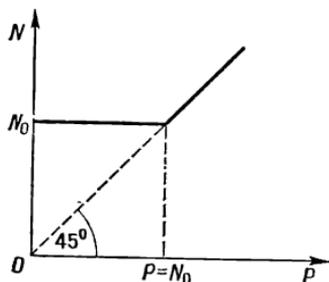


Рис. 152

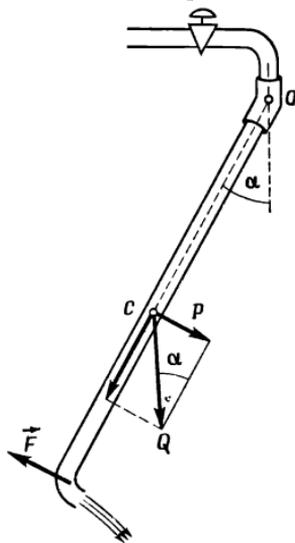


Рис. 153

остальных зарядов, будет равна нулю. Простой расчет показывает, что сила, действующая на положительные заряды, равна нулю при $a = b\sqrt{3}$. Аналогично сила, действующая на отрицательные заряды, равна нулю при $b = a\sqrt{3}$. Видим, что если a и b отличны от нуля, то оба эти условия не могут выполняться одновременно, следовательно, при $\omega = 0$ состояние равновесия невозможно.

Если же система вращается, то кроме электрических сил действует еще центробежная сила (в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вместе с отрицательными зарядами). Эта сила действует только

на отрицательные заряды, поскольку положительные заряды расположены на оси вращения. В состоянии равновесия равнодействующая всех сил, действующих на каждый из зарядов, должна равняться нулю. Определив эту равнодействующую сил для положительных и отрицательных зарядов, получим зависимости

$$a = b \sqrt{3},$$

$$\omega = e \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 m} \left(\frac{2}{\sqrt{(a^2 + b^2)^3}} - \frac{1}{4a^3} \right)}.$$

Обе эти зависимости должны выполняться одновременно. Определение вида равновесия предоставим читателю.

15. Введем обозначения, как показано на рис. 153. Определим силу отдачи F , отклоняющую трубку в направлении, противоположном направлению истечения воды. Объем воды, вытекающей за время Δt , равен

$$\Delta V = Sv \Delta t,$$

где v — скорость воды, S — площадь поперечного сечения потока.

Этот объем воды имеет импульс

$$\Delta P = Sv \Delta t \rho v,$$

где ρ — плотность воды. Но известно, что

$$\Delta P = F \Delta t,$$

следовательно,

$$F = Sv^2 \rho.$$

Вес трубки с водой равен

$$Q = (M_{\text{тр}} + Sl\rho) g,$$

где $M_{\text{тр}}$ — масса трубки, l — ее длина.

В состоянии равновесия моменты сил F и Q относительно точки O должны быть равны:

$$Fl = P \frac{l}{2},$$

где $P = Q \sin \alpha$.

Подставляя вместо P и Q полученные выражения, находим

$$\sin \alpha = \frac{2Sv^2}{(M_{\text{тр}} + Sl\rho)g}.$$

В числовом выражении $\sin \alpha = 0,2224$ и $\alpha = 12,85^\circ$.

16. Чтобы система находилась в равновесии, сила, действующая на каждый заряд со стороны всех остальных зарядов, должна быть равна нулю. Учитывая указанное в условии задачи расположение зарядов, определим результирующую силу, действующую на один из зарядов, находящихся в центре грани, и на один из зарядов, находящихся в вершине куба. Получим два равенства, которые для отличных от нуля зарядов не могут выполняться одновременно. Это означает, что система не может находиться в равновесии.

17. Очевидно, что при любой длине нити положение рамки, показанное на рисунке в условии задачи, является положением равновесия. Но практическое значение может иметь только положение устойчивого равновесия. При устойчивом равновесии любое небольшое отклонение всегда приводит к появлению силы, стремящейся вернуть систему в первоначальное положение.

Рассматриваемая система имеет две степени свободы. Это означает, что для полного описания ее требуются два независимых параметра. В качестве первого параметра возьмем угол отклонения φ , обозначенный на рис. 154, а в качестве второго — расстояние x от гвоздика до левого края рамки.

Очевидно, что в положении устойчивого равновесия угол φ должен быть равен нулю. В положении $\varphi \neq 0$ на рамку действует отличный от нуля момент силы относительно точки S . Этот момент равен моменту силы тяжести, поскольку моменты сил, действующих в точках прикрепления нитей, равны нулю (силы натяжения нитей имеют равное нулю плечо относительно точки S). Нетрудно заметить, что момент силы тяжести действует таким образом, что центр рамки стремится переместиться на вертикаль, проходящую через точку S , при этом угол φ становится равным нулю.

Остается, следовательно, рассмотреть только те положения рамки, при которых $\varphi = 0$. Это значительно

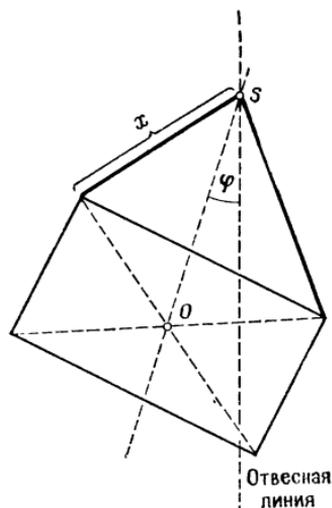


Рис. 154

упрощает дело, поскольку теперь мы имеем дело только с одной степенью свободы.

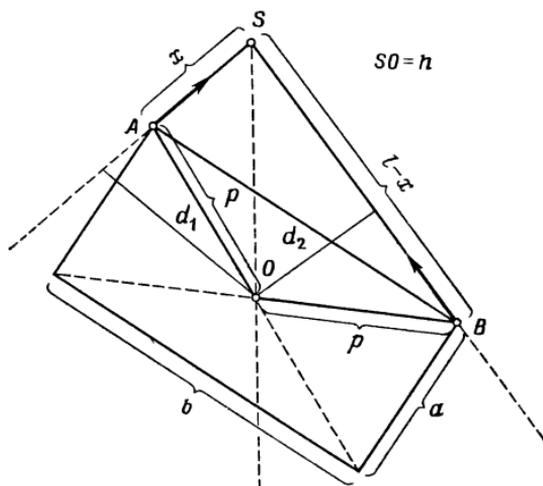


Рис. 155

Рассмотрим положение рамки, показанное на рис. 155. На углы рамки действуют силы натяжения нити, равные по абсолютной величине и направленные вдоль нитей. Их моменты относительно точки O различны как по знаку, так и по величине, поскольку

силы имеют разные плечи. Значит, относительно точки O на рамку действует некоторый результирующий момент силы. Установим, будет ли он приводить к увеличению или к уменьшению отклонения рамки от положения, симметричного относительно OS .

Поскольку силы натяжения равны по абсолютной величине, то результирующий момент будет зависеть только от длины плеч d_1 и d_2 .

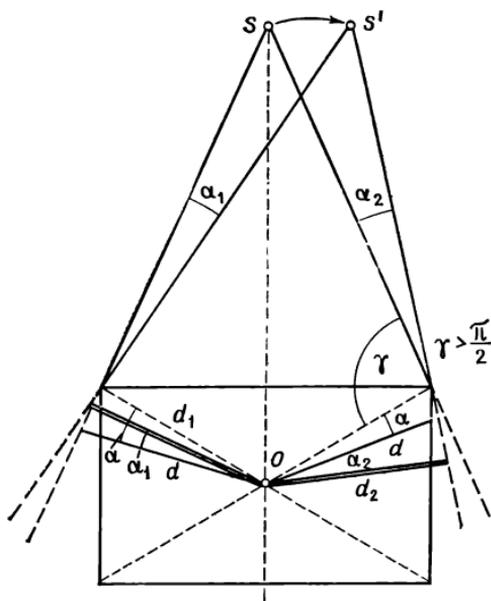


Рис. 156

Следовательно, проблема сводится к определению плеч d_1 и d_2 при повороте рамки либо, что то же самое, к определению d_1 и d_2 при перемещении точки подвеса нити (без изменения ее длины), как показано на рис. 156. В ситуации, показанной на этом рисунке, при перемещении точки подвеса вправо появляется результирующий момент сил, стремящийся повернуть рамку по часовой стрелке, т. е. вернуть ее в положение равновесия. Это означает, согласно предыдущим замечаниям, что d_1 должно быть больше d_2 . Равновесие будет при этом устойчивым.

Рассмотрим три случая: 1) угол γ , показанный на рис. 156, тупой; 2) этот угол острый и 3) $\gamma = \pi/2$.

В первом случае при небольшом отклонении системы от симметричного положения в показанном на-

правлении величина угла α между плечом d_1 и диагональю уменьшается на α_1 , а, значит, $d_1 > d$. В то же время величина угла α между плечом d_2 и диагональю увеличится на α_2 , значит, $d_2 < d$. Следовательно, $d_1 > d_2$. Теперь очевидно, что при $\gamma > \pi/2$ симметричное положение является положением устойчивого равновесия.

Второй случай, когда γ — острый угол, иллюстрирует рис. 157. Теперь при небольшом отклонении от

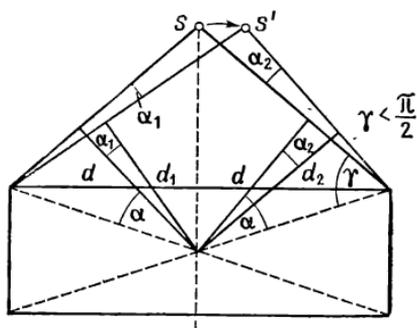


Рис. 157

симметричного положения угол α с левой стороны увеличивается на α_1 , а с правой уменьшается на α_2 . В результате оказывается, что $d_1 < d_2$. Таким образом, если γ — острый угол, то симметричное положение не является положением устойчивого равновесия.

Третий случай, когда $\gamma = \pi/2$, показан на рис. 158. В этом случае углы α_1 и α_2 всегда равны. Обозначим длину левой части нити через $(l/2 + q)$, а правый — через $(l/2 - q)$, где q — малая величина, характеризующая смещение. Тогда можно записать:

$$\frac{h}{l/2 + q} = \sin(\alpha - \alpha_1) \quad \text{и} \quad \frac{h}{l/2 - q} = \sin(\alpha + \alpha_2).$$

Тогда

$$\csc(\alpha - \alpha_1) = \frac{1}{2h} + \frac{q}{h}, \quad \csc(\alpha + \alpha_2) = \frac{1}{2h} - \frac{q}{h},$$

$$\csc \varphi = 1/\sin \varphi.$$

Поскольку в интересующих нас пределах углов кривая косеканса является вогнутой (рис. 159), то из условия одинакового изменения аргумента функции на q/h следует, что углы α_1 и α_2 должны удовлетворять

неравенству $\alpha_2 > \alpha_1$. Отсюда вытекает, что $d_2 < d_1$. Значит, рассматриваемое положение является положением устойчивого равновесия.

Итак, в положении устойчивого равновесия угол γ должен быть больше или равен $\pi/2$. Иными словами,

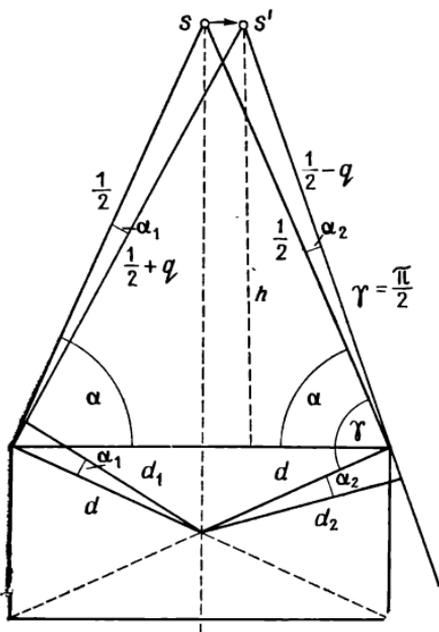


Рис. 158

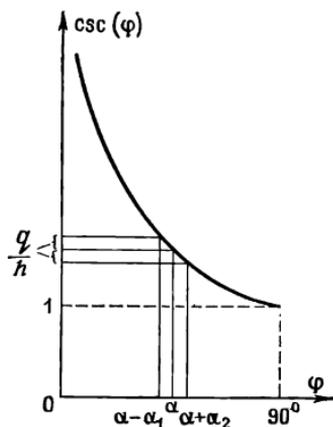


Рис. 159

чтобы положение рамки было устойчивым, длина нити должна удовлетворять неравенству

$$l \geq \frac{b}{a} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Отметим, что для тонкого стержня $a \ll b$, поэтому тонкий стержень можно подвесить на нити конечной длины так, чтобы он висел горизонтально только тогда, когда $l \geq b^2/a$.

При решении данной задачи можно исходить и из того, что положению устойчивого равновесия соответствует минимум потенциальной энергии.

18. Из соображений размерности ясно, что единственным соотношением, связывающим величину избыточного давления ΔP , коэффициент поверхностного натяжения σ и радиус r , является $A\sigma/r = \Delta P$, где A —

некоторая числовая константа. Анализируя условия равновесия для средней пленки, получаем

$$\frac{A\sigma}{r_1} + \frac{A\sigma}{r_{12}} = \frac{A\sigma}{r_2}.$$

Тогда

$$\frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}.$$

Знак r_{12} показывает, в какую сторону обращена выпуклость средней пленки: $r_{12} > 0$ — пленка обращена выпуклостью к мыльному пузырю, обозначенному индексом 1.

Перейдем теперь ко второй части задания. Поверхностное натяжение можно рассматривать как силу, действующую по касательной к пленке и приходящуюся на единицу длины контура пленки. Три одинаковые по абсолютной величине силы могут уравновешивать друг друга только в том случае, если они направлены под углом 120° одна к другой. Поэтому касательные к пленкам в каждой точке должны образовывать углы, равные 120° (рис. 160). Тогда в общем

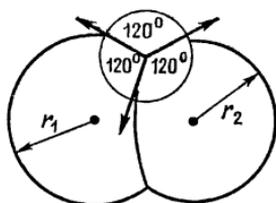


Рис. 160

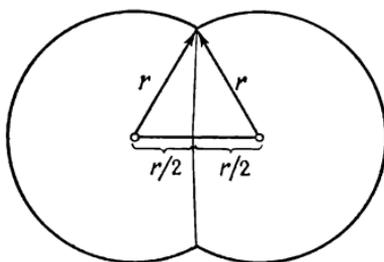


Рис. 161

случае при $r_1 = r_2 = r$ расстояние между центрами кривизны мыльных пузырей будет равно r (рис. 161).

Объем части шара, для которой $d = r/2$, равен $V = \frac{5}{24} \pi r^3$. Если конечный объем пузыря после разрыва средней пленки равен V_1 , а его радиус — R , то

$$\frac{3}{4} \pi R^3 = V_1 = \frac{4}{3} \pi r^3 + \frac{4}{3} \pi r^3 - 2 \frac{5}{24} \pi r^3.$$

Тогда

$$R = \frac{3}{2} \frac{r}{\sqrt[3]{2}}.$$

Обозначив радиусы пузырей до образования промежуточного пузыря через ρ и вновь воспользовавшись тем фактом, что объем сохраняется, получим

$$\frac{4}{3} \pi \rho^3 = \frac{4}{3} \pi r^3 - \frac{5}{12} \pi r^3, \quad \rho = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{r}{4}}.$$

19. Мысленно выделим на пузыре маленький круг радиусом r (рис. 162). В состоянии равновесия ре-

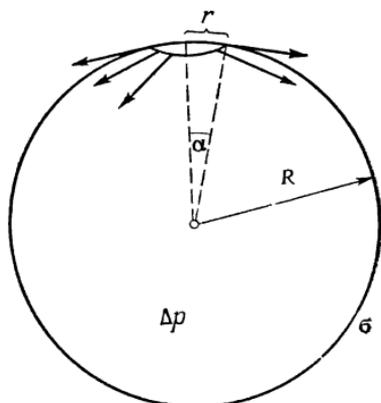


Рис. 162

зультирующая сила, действующая на этот круг, должна равняться нулю. Сила, действующая вниз, обусловлена поверхностным натяжением, действующим на контур рамки (круга). Она равна

$$F_{\downarrow} = 2\sigma \cdot \underbrace{2\pi r}_{\text{контур рамки}} \cdot \underbrace{\sin \alpha}_{\text{поскольку нас интересует вертикальная составляющая (горизонтальная уничтожается)}}.$$

поскольку у пленки две поверхности
контур рамки
поскольку нас интересует вертикальная составляющая (горизонтальная уничтожается)

Вверх направлено две силы:

а) сила, обусловленная избыточным давлением

$$F_{1\uparrow} = \Delta p \pi r^2,$$

б) сила, обусловленная электростатическим воздействием

$$F_{2\uparrow} = \frac{1}{2} \frac{q}{R^2} \underbrace{\frac{\pi r^2}{4\pi R^2}}_{\text{заряд на круге}} q = \frac{q^2}{8\pi R^4} \pi r^2.$$

Можем записать равенство

$$\frac{4\sigma}{R} \pi r^2 = \Delta p \pi r^2 + \frac{q^2}{8\pi R^4} \pi r^2,$$

откуда

$$\Delta p = \frac{4\sigma}{R} - \frac{q^2}{8\pi R^4}.$$

Следует обратить внимание на коэффициент $1/2$ в выражении для силы $F_{2\uparrow}$. Он обусловлен тем, что

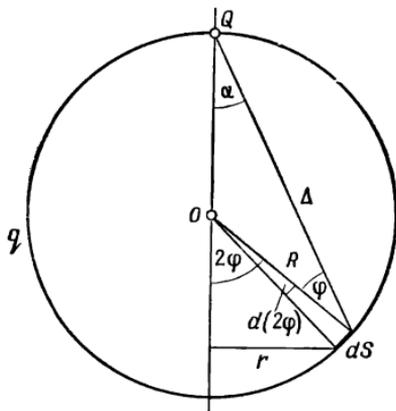


Рис. 163

сила, с которой воздействует заряженная шаровая поверхность на заряд Q , находящийся на ней, равен $1/2 q Q / R^2$. Докажем это, введя обозначения, как показано на рис. 163:

$$r = R \sin 2\varphi = 2R \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$\Delta = 2R \cos \varphi,$$

$$dS = 2\pi r R d(2\varphi) = 4\pi r R d\varphi,$$

$$dq = \frac{q}{4\pi R^2} dS = 2q \sin \varphi \cos \varphi d\varphi,$$

$$dF_{2\uparrow} = \frac{Q dq}{\Delta^2} \cos \varphi = \frac{Qq}{2R^2} \sin \varphi d\varphi.$$

Интегрируя это выражение по φ от 0 до $\pi/2$, получаем

$$F_{2\uparrow} = \frac{Qq}{2R^2}.$$

В состоянии равновесия при $\Delta p = 0$ сила $F_{1\uparrow}$ равна нулю. Значит, достаточно рассмотреть силы F_{\downarrow} и

$F_{2\uparrow}$. В окрестности положения равновесия эти силы изменяются так, как показано на рис. 164.

При увеличении R сила F_{\downarrow} становится больше $F_{2\uparrow}$, при уменьшении R , наоборот, $F_{2\uparrow}$ больше F_{\downarrow} . В обоих случаях результирующая сила стремится вер-

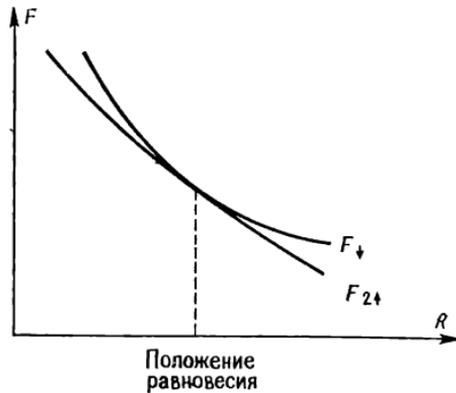


Рис. 164

нуть систему в первоначальное положение (положение равновесия). Следовательно, это положение равновесия устойчиво.

20. Сначала определим температуру Земли T_3 . В состоянии равновесия тело излучает столько же энергии, сколько поглощает. Поскольку вся поверхность Земли, согласно условию задачи, излучает одинаково, то энергия, потерянная Землей в 1 с в виде излучения, равна

$$E_{\text{изл}} = 4\pi R_3^2 \sigma T_3^4,$$

где R_3 — радиус Земли.

Энергия, поглощенная в течение 1 с, равна произведению площади сечения Земли по большому кругу на солнечную постоянную:

$$E_{\text{погл}} = \pi R_3^2 S.$$

Поскольку $E_{\text{изл}} = E_{\text{погл}}$, получаем

$$4\pi R_3^2 \sigma T_3^4 = \pi R_3^2 S.$$

Отсюда $T_3 = \sqrt[4]{\frac{S}{4\sigma}}$ (≈ 300 К).

Теперь определим температуру Солнца. Энергия, излучаемая всей поверхностью Солнца за 1 с равна

$$E_C = 4\pi R_C^2 \sigma T_C^4,$$

где R_C — радиус Солнца. Энергия солнечного излучения, проходящая через сферу, имеющую радиус, равный радиусу орбиты Земли, равна

$$E_{орб} = 4\pi R_{орб}^2 S,$$

где $R_{орб}$ — радиус орбиты Земли. Можно считать, что $E_C = E_{орб}$, т. е.

$$4\pi R_C^2 \sigma T_C^4 = 4\pi R_{орб}^2 S.$$

Тогда

$$T_C = \sqrt[4]{\frac{S}{\sigma (R_C/R_{орб})^2}}.$$

Так как $R_C \ll R_{орб}$, отношение $R_C/R_{орб}$ равно угловому радиусу Солнца, наблюдаемого с Земли:

$$\frac{R_C}{R_{орб}} = \frac{\alpha}{2}.$$

Значит,

$$T_C = \sqrt[4]{\frac{S}{\sigma (\alpha/2)^2}} \quad (\approx 5\,600 \text{ К}).$$

Электромагнитные явления

1. Вставленные одна в другую трубки образуют конденсатор, заполненный диэлектриком. Емкость этого конденсатора равна

$$C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d},$$

где ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума, а S — поверхность одной из обкладок. Через l обозначим длину трубок. Тогда

$$C = \frac{2\pi \epsilon \epsilon_0 R l}{d}.$$

Наружная обкладка заряженного конденсатора имеет заряд $Q = CV$. При вращении наружная трубка действует как соленоид, имеющий n витков на единицу

длины, через который проходит ток I , причем

$$nI = Qf.$$

Поле \vec{B} внутри длинного соленоида равно

$$B = \mu_0 nI.$$

Используя предыдущие равенства, получаем

$$B = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 RVf}{d}.$$

Поскольку $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$, следовательно,

$$B = \frac{2\pi\epsilon RVf}{c^2 d}.$$

Поле \vec{B} параллельно оси трубок, а значит, перпендикулярно к \vec{B}_z (рис. 165). Магнитная стрелка устанавливается

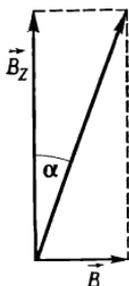


Рис. 165

параallelно результирующему полю, действующему на нее. Следовательно, необходимо определить угол между результирующей полем \vec{B} и \vec{B}_z и полем \vec{B}_z . Из рисунка видно, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B}{B_z} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 RVf}{B_z c^2 d}.$$

Подставляя числовые значения, получаем $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\pi}{18} \cdot 10^{-2}$. Поскольку $\operatorname{tg} \alpha \ll 1$, следовательно,

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{\pi}{18} \cdot 10^{-2} \text{ рад} \approx 6'.$$

Значит, стрелка отклонится на угол, равный $6'$. Это очень малый угол, и при помощи обычных приборов для измерения углов его трудно было бы изме-

ритель. Однако его измерение возможно. Для этого на стрелке нужно поместить зеркальце. При освещении зеркала пучком света его отражение, так называемый «зайчик», наблюдаемый на достаточно удаленном экране, будет весьма заметно перемещаться даже при очень малых углах отклонения стрелки.

2. Сначала проанализируем процесс электризации шара K . Ртуть, находящаяся в трубке между кранами, составляет одну из обкладок цилиндрического конденсатора, второй обкладкой которого служит заземленная фольга. Этот конденсатор заряжен до $\mathcal{E} = 120$ В. Порция ртути, несущая определенный заряд q , после «шлюзования» отдает этот заряд шару K .

Пусть Q , C и U обозначают соответственно заряд, емкость и напряжение (относительно земли) шара K после заполнения его заряженной ртутью. Тогда

$$U = Q/C.$$

Очевидно, что

$$C = 4\pi\epsilon_0 R.$$

Определим заряд Q . Из условия сохранения электрического заряда

$$Q = nq,$$

где n — число «порций» ртути.

Объем трубки между кранами нам неизвестен, но, как мы убедимся дальше, он и не нужен. Пусть длина трубки между кранами равна l . Тогда

$$n = \frac{\frac{4}{3} \pi R^3}{\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 l},$$

$$q = \epsilon\epsilon_0 \frac{\pi a l}{d} \mathcal{E},$$

$$Q = nq = \frac{16\pi\epsilon\epsilon_0 R^3}{3ad} \mathcal{E},$$

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{4R^2\epsilon}{3ad} \mathcal{E}.$$

Видим, что величина l при подстановке сокращается. Находим численное значение напряжения $U = 456$ кВ.

3. При $x < a$ наличие ленты не изменяет распределения потенциала. Емкость конденсатора в этом случае (рис. 166) равна

$$C = \frac{a^2}{4\pi d} \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_3^2 + \varepsilon_2\varepsilon_3^2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)}$$

независимо от x .

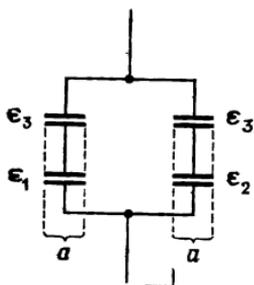


Рис. 166

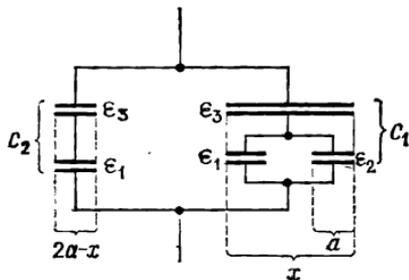


Рис. 167

При $a \leq x \leq 2a$ (рис. 167) имеем

$$C(x) = C_1 + C_2 = \frac{a^2}{4\pi d} \frac{\varepsilon_3}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)^2} \left[2\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 - \frac{\varepsilon_3(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2 a}{\varepsilon_1 + \varepsilon_3} \frac{1}{x + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_3} a} \right].$$

При $x > 2a$ емкость конденсатора принимает значение $C(2a)$.

Учитывая изменение энергии батареи UQ_6 при помещении ленты и закон сохранения заряда, можем записать

$$Q_6 + Q_k = Q_0,$$

или

$$Q_6 = Q_0 - Q_k,$$

где Q_0 — заряд на конденсаторе при $x = 0$; Q_6 — приток заряда от батареи; Q_k — заряд на конденсаторе.

Потенциальная энергия всей системы (батарея + конденсатор) равна, следовательно,

$$\begin{aligned} E_{\text{п}} &= U(Q_0 - Q_k) + \frac{1}{2} CU^2 = UQ_0 + \frac{1}{2} CU^2 - UQ_k = \\ &= UQ_0 - \frac{1}{2} CU^2. \end{aligned}$$

Величина UQ , входящая в выражение $E_{\text{п}}$, не изменяется, поскольку она связана только с выбором состояния, относительно которого отсчитывается потенциальная энергия. Следовательно, можно записать, что потенциальная энергия системы батарея + конденсатор равна

$$E_{\text{п}} = -\frac{1}{2}CU^2.$$

Силу F определим, подсчитав $-\frac{d}{dx}E_{\text{п}}$:

$$F_x = \begin{cases} 0 & \text{при } x \geq 2a \text{ или } x \leq a, \\ \frac{1}{2}U^2 \frac{a^3}{4\pi d} \frac{\epsilon_3^2(\epsilon_2 - \epsilon_1)^2}{(\epsilon_1 + \epsilon_3)^2} \frac{1}{\left(x + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_3}a\right)^2} & \text{при } a < x < 2a. \end{cases}$$

График изменения $F(x)$ показан на рис. 168. В точках $x = a$ и $x = 2a$ происходят скачкообразные изменения втягивающей силы, обусловленные тем, что мы

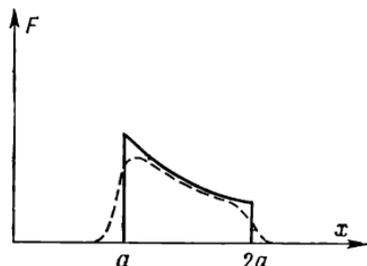


Рис. 168

не учитывали краевые эффекты. Учет этих эффектов привел бы к определенному сглаживанию кривой (пунктирная линия). Наибольшее значение силы F , втягивающей ленту, равно $F(a) \approx 2,5 \cdot 10^{-3}$ Н.

Если бы до помещения ленты между диэлектриками батарея была отключена, то дифференцирование следовало бы проводить не при постоянном потенциале, а при постоянном заряде на обкладках конденсатора. Сила, втягивающая ленту, была бы в этом случае меньше, поскольку для любого определенного значения x потенциал на конденсаторе был бы меньше.

Следует обратить внимание на два знака «минус»: один в выражении для потенциальной энергии E_n , второй в выражении для силы F .

4. Закон индукции Фарадея выражается равенством

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

\mathcal{E} — э. д. с. индукции, а $d\Phi/dt$ — скорость изменения магнитного потока, проходящего через площадь, охватываемую контуром, причем контур должен быть жестко связан с проводником. Если контур перемещается относительно проводника, то данное равенство не выполняется.

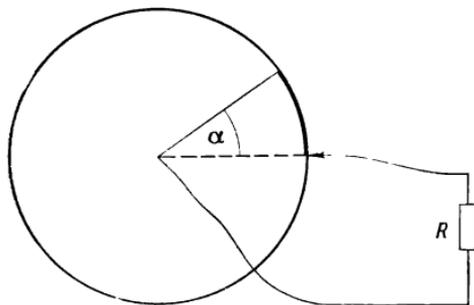


Рис. 169

Для определения э. д. с., индуцированной во вращающемся блоке, следует выбрать для рассмотрения такой контур, который в рассматриваемом интервале времени будет постоянно проходить через одни и те же точки блока. Рассмотрим контур, показанный на рис. 169, и определим скорость изменения магнитного потока, проходящего через него. Ясно, что эта скорость связана с увеличением поверхности сектора круга на величину, измеряемую центральным углом, равным $\alpha = \omega t$. Обозначив площадь этого сектора через S , можем записать

$$\Phi = BS = \frac{1}{2} Br^2 \omega t,$$

а значит,

$$|\mathcal{E}| = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2} Br^2 \omega.$$

Для определения установившейся угловой скорости блока используем баланс энергии. Энергия, выделяе-

мая на резисторе R в единицу времени, равна

$$\mathcal{E}I = \frac{\mathcal{E}^2}{R}.$$

Выделение энергии на резисторе происходит за счет уменьшения потенциальной энергии груза. В единицу времени груз опускается на ωr . Следовательно,

$$\frac{\left(\frac{1}{2} Br^2 \omega\right)^2}{R} = mg\omega r,$$

откуда

$$\omega = \frac{4mgR}{B^2 r^3}.$$

Если бы резистор R вместе с проводами был жестко связан с блоком, то ток по нему не пошел бы и грузик опускался бы равноускоренно.

5. Введем обозначения, как показано на рис. 170. Согласно закону Ома, имеем

$$i_I = \frac{U}{\rho R (2\pi - \alpha)},$$

$$i_{II} = \frac{U}{\rho R \alpha},$$

где U — напряжение между точками A и B , обозначенными на рис. 38 в условии задачи, а ρ — сопротивление, приходящееся на единицу длины провода.

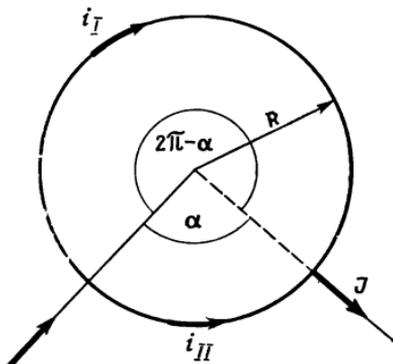


Рис. 170

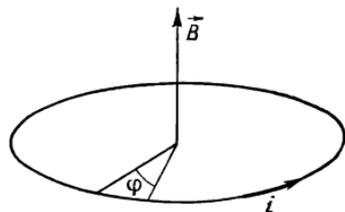


Рис. 171

Магнитное поле в центре кольца с током показано на рис. 171. Поле B определяется суммой вкладов отдельных участков, на которые можно мысленно разде-

лить кольцо. Поскольку эти поля складываются алгебраически (их направления одинаковы), вклад каждого участка кольца пропорционален углу φ :

$$B_{\varphi} = Ci\varphi,$$

где C — константа.

Следовательно,

$$B_I = Ci_I(2\pi - \alpha) = C \frac{U}{\rho R},$$

$$B_{II} = Ci_{II}\alpha = C \frac{U}{\rho R}.$$

Мы видим, что величины напряженностей полей от обеих дуг одинаковы. Поскольку поля \vec{B}_I и \vec{B}_{II} направлены противоположно, результирующее магнитное поле в центре кольца будет равно нулю.

6. Обозначим искомое расстояние AC (рис. 172) через x . Сопротивление единицы длины провода и экрана будут соответственно равны R и r . Эти величины нам неизвестны.

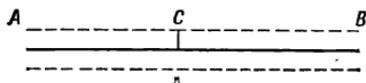


Рис. 172

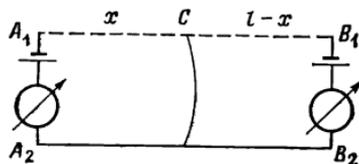


Рис. 173

Целесообразно построить решение этой задачи на измерении силы тока, проходящего через участок: первый раз A_1CA_2 , второй раз — через B_1CB_2 (рис. 173). Согласно закону Ома, имеем

$$i_A = \frac{\mathcal{E}}{xR + xr},$$

$$i_B = \frac{\mathcal{E}}{(l-x)R + (l-x)r},$$

где \mathcal{E} — э. д. с. аккумуляторов.

Из этих уравнений определим

$$x = \frac{l}{i_A/i_B + 1}.$$

Как видим, э. д. с. батареев аккумуляторов, сопротивление единицы длины провода и экранирующей оболочки сократились.

7. Представим себе, что один раз система резисторов включена так, как на рис. 39 в условии задачи, а потом A заменили на B . Из соображений симметрии, а также вследствие того, что величина омического сопротивления зависит от направления тока, оба полученных контура физически неразличимы, т. е. распределение напряжений в обоих случаях одинаково. Рассмотрим точку C , лежащую в плоскости σ . Потенциал U этой точки в обоих случаях должен быть одинаковым, поскольку в том и другом случае это одна и та же точка системы резисторов, а распределение напряжений не изменилось. Тогда оказывается, что $U_{AC} = U_{CB}$. Поскольку

$$U_{AC} + U_{CB} = U,$$

где U — разность потенциалов между точками A и B , следовательно,

$$U_{AC} = \frac{1}{2} U = \text{const}$$

независимо от того, какую из точек C , лежащих на плоскости σ , мы рассматриваем.

8. Мысленно выберем элемент кольца и рассмотрим систему отсчета, в которой этот элемент покоится. Поскольку кольцо движется с определенным угловым ускорением ϵ , выбранный нами элемент кольца имеет линейное ускорение $a = r\epsilon$. Говоря о системе отсчета, связанной с кольцом, мы имеем в виду систему отсчета, неподвижно связанную с кристаллической решеткой металла. В этой системе на электроны действует сила инерции, равная по величине и направленная противоположно ускорению ϵr . Но из-за взаимодействия электронов с кристаллической решеткой эта сила не будет разгонять электроны до слишком больших скоростей. Взаимодействие электронов с решеткой, согласно закону Ома, возрастает при увеличении скорости электронов относительно решетки. По истечении некоторого времени сила, тормозящая электроны, становится равной по величине силе инерции.

В результате электроны будут двигаться относительно решетки с некоторой скоростью. Иначе говоря, несмотря на отсутствие внешней э. д. с., в системе отсчета, связанной с решеткой, потечет электрический ток.

Если бы на электроны действовало настоящее электрическое поле, то величину силы тока можно было бы определить из закона Ома. Однако заметим, что сила инерции постоянна и направлена по касательной к кольцу, а значит, ее воздействие на электроны будет таким же, как воздействие постоянного электрического поля соответствующей величины, направленного по касательной к кольцу в каждой его точке. Величина эквивалентного электрического поля E определяется из условия, что электрическая сила, действующая на каждый электрон, равна по величине силе инерции

$$eE = mrv.$$

Тогда

$$E = \frac{mrv}{e}.$$

В покоящемся линейном проводнике с сопротивлением на единицу длины, равным ρ , поле такой величины вызывало бы ток

$$I = \frac{E}{\rho}.$$

Значит, сила тока в рассматриваемом кольце была бы равна

$$I = \frac{mrv}{\rho e}.$$

Хотя поле E и не является «настоящим» электрическим полем, а лишь эквивалентом, описывающим действие силы инерции, ток действительно течет по кольцу, поскольку электроны действительно перемещаются относительно кристаллической решетки. Поэтому ток в середине кольца должен вызывать магнитное поле с индукцией

$$B = \mu_0 \frac{I}{2r} = \frac{\mu_0 mrv}{2er}.$$

В приведенном решении мы принимали, что постоянная скорость электронов относительно решетки устанавливается очень быстро, практически мгновенно. Это предположение для «обычных» проводников с «обычными» значениями ρ выполняется достаточно

хорошо. Но для проводников с очень малыми значениями ρ оно неверно. В частности, оно не выполняется для сверхпроводников, при $\rho \rightarrow 0$.

9. Представим себе металлический шар в однородном внешнем электрическом поле \vec{E} , направленном так, как показано на рис. 174. Под действием поля на шаре произойдет перераспределение электрических

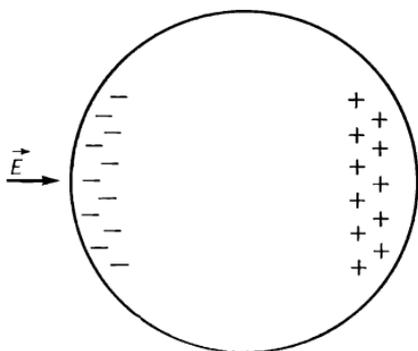


Рис. 174

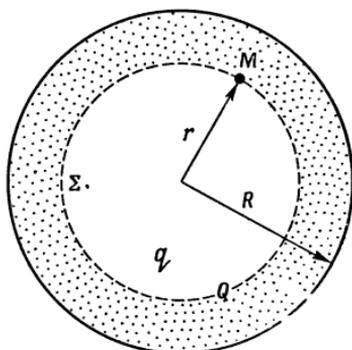


Рис. 175

зарядов. В состоянии равновесия в левой части поверхности шара будут преобладать отрицательные заряды, а в правой — положительные. Электрическое поле, вызванное индуцированными зарядами на поверхности шара, обозначим через \vec{E}_1 . Очевидно, что в различных точках пространства \vec{E}_1 может быть различным. После помещения в поле \vec{E} металлического шара результирующее электрическое поле равно $\vec{E} + \vec{E}_1$. Это относится как к внешней, так и к внутренней области шара. Однако, как известно, электрическое поле внутри проводника, находящегося во внешнем электрическом поле, равно нулю, т. е.

$$\vec{E} + \vec{E}_1 = 0.$$

Обратимся теперь к примечанию, приведенному в условии задачи. Чтобы ответить на поставленные там вопросы, нужно сначала определить напряженность электрического поля $\vec{E}_{ш}$ внутри шара радиусом R ,

равномерно заряженного по объему и имеющего общий заряд Q . Величину $\vec{E}_{\text{ш}}$ определим двумя методами.

Рассмотрим точку M , находящуюся на расстоянии r от центра шара ($r < R$), равномерно заряженного по объему (рис. 175). Согласно замечаниям, сделанным при решении задачи о шахте, проходящей через центр Земли, напряженность электрического поля в точке M , создаваемая заштрихованной частью шара, равна нулю. Следовательно, в точке M имеется только электрическое поле, обусловленное зарядом, размещенным в незаштрихованной части шара. Поэтому можем записать

$$E_{\text{ш}}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Поле $E_{\text{ш}}$ в каждой точке, очевидно, параллельно вектору \vec{r} . Значит,

$$\vec{E}_{\text{ш}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad \text{Но} \quad \frac{q}{Q} = \frac{r^3}{R^3}.$$

Используя последнее равенство, получаем

$$\vec{E}_{\text{ш}}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r}.$$

Выведем теперь это уравнение, основываясь на теореме Гаусса. Согласно этой теореме, поток электрического поля, проходящего через произвольную замкнутую поверхность, равен q/ϵ_0 , если весь заряд q помещен внутри этой поверхности. Рассмотрим рис. 175.

В силу симметрии поле $\vec{E}_{\text{ш}}$ в каждой точке поверхности Σ перпендикулярно к ней и имеет одинаковое численное значение. Поток поля $\vec{E}_{\text{ш}}$ через поверхность Σ , следовательно, равен $4\pi r E_{\text{ш}}(\vec{r})$. Эта величина, согласно теореме Гаусса, должна равняться q/ϵ_0 . Значит,

$$\vec{E}_{\text{ш}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^3} \vec{r}.$$

Учитывая направление поля $\vec{E}_{\text{ш}}$, получаем ту же величину поля, что и прежде.

Рассмотрим теперь два шара с радиусами R , смещенные друг относительно друга на расстояние l и

имеющие заряд $+Q$ и $-Q$ (рис. 176). Результирующий заряд в общем объеме, очевидно, равен нулю.

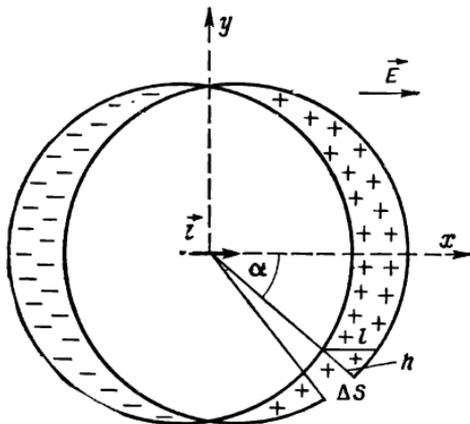


Рис. 176

Результирующее поле в этом общем объеме равно

$$E_{\text{рез}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{R^3} \left(\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{l} \right) - \frac{Q}{R^3} \left(\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{l} \right) \right] = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \cdot \vec{l}.$$

Как видим, это однородное поле. Устремим теперь l к нулю, но так, чтобы поле $\vec{E}_{\text{рез}}$ было по-прежнему равно $-\vec{E}$ ($=\vec{E}_1$). Это возможно, если при $l \rightarrow 0$ произведение Ql остается постоянным. Тогда результирующее электрическое поле в общем объеме останется равным нулю, и в то же время заряд, помещенный на краях, обозначенных знаками (+) и (-), даст поверхностную плотность σ .

Согласно рис. 176, на элемент поверхности ΔS приходится заряд

$$\Delta Q = \Delta S h \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \Delta S \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} l \cos \alpha.$$

Тогда

$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{Ql}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cos \alpha,$$

но

$$- \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ql}{R^3} + E = 0.$$

Значит, $\sigma = 3\epsilon_0 E \cdot \cos \alpha$.

10. Введем обозначения согласно рис. 177. Для постоянного тока система ведет себя, как мостик Уитстона. Следовательно,

$$R_1 R_4 = R_2 R_3. \quad \text{Тогда} \quad R_1 = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (= 450 \text{ Ом}).$$

Для переменного тока

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + R_1 I_1 = L_2 \frac{dI_2}{dt} + R_2 I_2,$$

$$R_3 I_1 = R_4 I_2.$$

Первое из этих уравнений выражает равенство напряжений U_{AB} и U_{AC} , второе — равенство напряжений

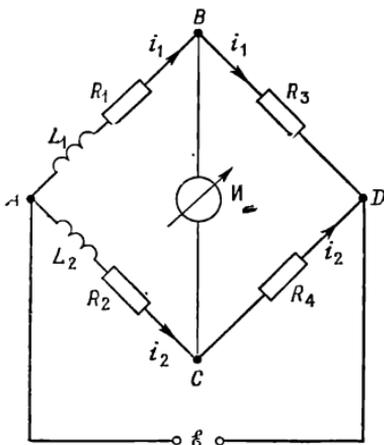


Рис. 177

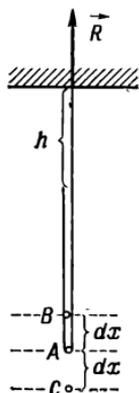


Рис. 178

U_{BD} и U_{CD} . Если бы эти равенства не выполнялись, то между точками B и C существовала бы определенная разность потенциалов и через измерительный прибор проходил бы ток.

Из второго уравнения находим

$$I_2 = \frac{R_3}{R_4} I_1.$$

Значит,

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + R_1 I_1 = L_2 \frac{R_3}{R_4} \frac{dI_1}{dt} + R_2 \frac{R_3}{R_4} I_1.$$

Из условия, данного в начале задачи (для постоянного тока), следует, что члены уравнения, не содержащие производных, равны. Поэтому

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} = L_2 \frac{R_3}{R_4} \frac{dI_1}{dt}.$$

Если э. д. с. \mathcal{E} произвольно изменяется во времени, то $dl_1/dt \neq 0$. Следовательно, можно обе части последнего равенства разделить на dl_1/dt . Получим

$$L_1 = L_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (= 4500 \text{ Гн}).$$

Отметим, что приведенное решение верно в общем случае, а не только для синусоидальных токов.

Разное

1. В ситуации, показанной на рис. 178, скорость левой части троса равна $\sqrt{2gh}$. Импульс элемента троса AB длиной dx равен $\frac{M}{l} dx \sqrt{2gh}$. Этот импульс полностью «расходуется» за время, в течение которого верхний конец рассматриваемого элемента троса пройдет расстояние BC длиной $2dx$. Это время равно $2dx/v = 2dx/\sqrt{2gh}$. Значит, дополнительная сила, действующая на закрепленный крюк, равна

$$\frac{dp}{dt} = \frac{M}{l} dx \sqrt{2gh} \frac{1}{2dx} \sqrt{2gh} = Mg \frac{h}{l}.$$

При максимально возможном значении h эта сила равна Mg . Сила, действующая на крюк, представляет собой сумму вычисленной выше дополнительной силы и силы тяжести. Максимальное значение этой силы равно $Mg + Mg = 2Mg$. Поэтому, чтобы крюк не вырвало, должно выполняться неравенство

$$N \geq 2Mg.$$

Эту задачу можно решить и другим способом. Воспользуемся тем, что

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

где \vec{p} — полный импульс системы, а \vec{F} — полная сила, действующая на систему или на трос как целое. Импульс троса равен импульсу его левой части, имеющей длину $(l - h)/2$:

$$p = \frac{l - h}{2} \frac{M}{l} \sqrt{2gh},$$

но поскольку $h = gt^2/2$, следовательно,

$$p = \frac{l - gt^2/2}{2} \cdot \frac{M}{l} gt.$$

Полная сила, действующая на трос, равна результирующей силы тяжести $M\vec{g}$ и силы \vec{R} , с которой крюк действует на трос. Отсюда

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{l - gt^2/2}{2} \cdot \frac{M}{l} gt \right] = Mg - R.$$

Тогда

$$\frac{1}{2} Mg - \frac{1}{4} \frac{M}{l} g^2 t^2 = Mg - R.$$

Это соотношение справедливо в каждый момент падения троса. Для времени t , соответствующего моменту $T = \sqrt{2l/g}$ (нижнее положение троса), имеем

$$\frac{1}{2} Mg - \frac{3}{2} \frac{M}{l} gl = Mg - R, \quad \text{откуда} \quad R = 2Mg.$$

Очевидно, это есть наибольшее значение силы R за все время падения троса. Согласно условию задачи, должно выполняться требование

$$N \geq 2Mg.$$

2. На куб действуют следующие внешние силы: сила тяжести и сила реакции опоры, обе направленные по вертикали. В горизонтальном направлении на куб не действуют никакие силы, а значит, горизонтальная составляющая импульса центра куба должна быть постоянной во времени. Поскольку эта составляющая в начальный момент была равна нулю, она остается равной нулю все время. Это означает, что центр куба будет перемещаться только в вертикальном направлении. Искомую угловую скорость ω определим из условия

$$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega = mg \frac{a}{2} (\sqrt{2} - 1), \quad (1)$$

конечная, кинетическая энергия (начальная была равна нулю)

разность начальной и конечной потенциальной энергии

где v — скорость центра масс куба, I — момент инерции куба относительно оси, проходящей через центры противоположных граней, ω — угловая скорость куба относительно той же оси в конечный момент.

Чтобы определить угловую скорость ω , следует сначала установить зависимость между v и ω в конечный момент и найти соответствующее выражение для I .

Линейная скорость ребра, скользящего по горизонтальной поверхности, в системе отсчета, которая движется вертикально вместе с центром куба, равна произведению ω на половину диагонали квадрата, являющегося боковой гранью куба:

$$v_1 = \omega \frac{1}{2} a \sqrt{2}.$$

В конечный момент скорость v_1 направлена под углом 45° к горизонтали. Вертикальная составляющая v' скорости v равна при этом

$$v' = \frac{1}{2} \sqrt{2} v_1 = \frac{1}{2} \omega a.$$

Очевидно, такое же значение имеет скорость v :

$$v = \frac{1}{2} \omega a.$$

Определим теперь момент инерции I . Ясно, что момент инерции куба относительно оси, проходящей через центры противоположных граней, равен по величине моменту инерции тонкой квадратной пластины (масса которой равна массе куба и сторона равна ребру куба) относительно оси, перпендикулярной к плоскости пластины и проходящей через ее середину.

Мысленно поделим пластину на очень малые элементы массой m_i . Согласно рис. 179, имеем

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2.$$

Из соображений симметрии

$$\sum_i m_i x_i^2 = \sum_i m_i y_i^2. \quad \text{Значит,} \quad I = 2 \sum_i m_i x_i^2.$$

Отметим, что $\sum_i m_i x_i^2$ означает момент инерции пластины относительно оси, совпадающей с осью y . Этот момент, очевидно, равен моменту инерции стержня (масса которого равна массе пластины, а длина равна ее стороне) относительно оси, проходящей через центр стержня и перпендикулярной к нему. Момент инерции

стержня равен $ma^2/12$, поэтому

$$I = 2 \frac{1}{12} ma^2 = \frac{1}{6} ma^2.$$

Это равенство можно получить также на основании теоремы Штейнера и анализа размерностей. Момент инерции тела равен

$$I = \sum_i m_i r_i^2.$$

Если массу каждого элемента увеличим в k раз, то момент увеличится в k раз. Следовательно, можно записать $I \sim m$.

Аналогично если размер каждого элемента r_i увеличить в l раз, то момент инерции I возрастет в l^2 раз,

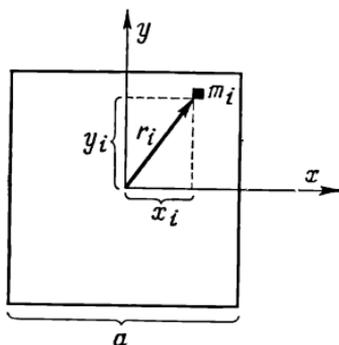


Рис. 179

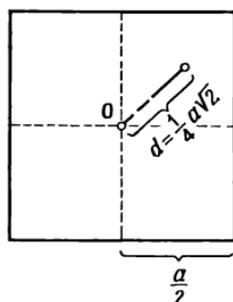


Рис. 180

а все линейные размеры пластины увеличатся пропорционально l . Значит, $I \sim a^2$.

Обобщая эти две зависимости, получим

$$I \sim \alpha ma^2. \quad (2)$$

Величина ma^2 имеет размерность момента инерции, поэтому коэффициент пропорциональности α должен быть безразмерным, ибо единственными параметрами, характеризующими механические свойства пластины, являются m и a .

Поделим теперь пластину на четыре части, как показано на рис. 180. Момент инерции каждой из четырех частей относительно оси, проходящей через точку O и перпендикулярной к плоскости рисунка, обозначим через I_1 . Тогда

$$I = 4I_1, \quad \text{но по теореме Штейнера} \quad I_1 = I' + \frac{m}{4} d^2,$$

где I' — момент инерции каждой из четырех частей относительно собственного центра. Согласно уравнению (2),

$$I' = \alpha \frac{m}{4} \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

откуда

$$\alpha ma^2 = 4 \left[\alpha \frac{m}{4} \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{m}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 a^2 \right].$$

Тогда $\alpha = 1/6$, а

$$I = \frac{1}{6} ma^2.$$

Подставляя в уравнение (1) зависимость v от ω , а также полученное выражение для I , найдем

$$\omega = \sqrt{\frac{12g}{5a} (\sqrt{2} - 1)}.$$

3. На систему диск + майский жук относительно оси ее вращения не действуют никакие моменты внешних сил, поскольку это изолированная система. Следовательно, можем воспользоваться законом сохранения момента импульса относительно центра диска. Обозначим конечное расстояние от майского жука до центра диска через r . Начальный момент инерции системы относительно центра диска равен $nmR^2 + I$, а конечный $nmr^2 + I$.

Из закона сохранения момента импульса имеем

$$(nmR^2 + I)\omega_1 = (nmr^2 + I)\omega_2.$$

Работа, совершенная всеми майскими жуками вместе, равна разности между конечным и начальным значениями кинетической энергии:

$$nW = \frac{(nmr^2 + I)\omega_2^2}{2} - \frac{(nmR^2 + I)\omega_1^2}{2}.$$

Используя предыдущее равенство, можно записать

$$\begin{aligned} nW &= \frac{1}{2} (nmR^2 + I) \frac{\omega_1}{\omega_2} \omega_2^2 - \frac{1}{2} (nmR^2 + I) \omega_1^2 = \\ &= \frac{1}{2} (nmR^2 + I) \omega_1 (\omega_2 - \omega_1). \end{aligned}$$

Значит,

$$W = \frac{1}{2} \left(mR^2 + \frac{I}{n} \right) \omega_1 (\omega_2 - \omega_1).$$

Подставляя численные значения, получаем $W \approx 1,11 \cdot 10^{-4}$ Дж.

4. Момент инерции I призмы, согласно проведенным в предыдущей задаче рассуждениям, должен быть равен

$$I = \alpha m a^2,$$

где α — числовая константа. Воспользовавшись ри-

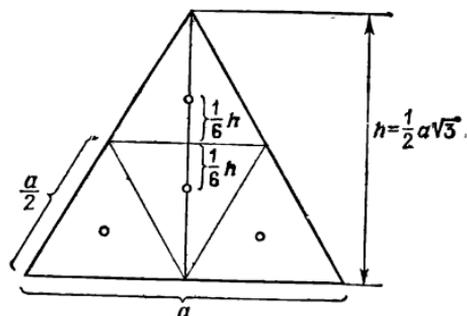


Рис. 18г

сунком 18г и теоремой Штейнера, можно записать

$$I = 4I' + 3 \frac{m}{4} \left(\frac{1}{3} h \right)^2,$$

но

$$I' = \alpha \frac{m}{4} \left(\frac{a}{2} \right)^2, \quad a \quad h = \frac{1}{2} a \sqrt{3}.$$

Тогда получаем

$$\alpha m a^2 = 4\alpha \frac{m}{4} \left(\frac{a}{2} \right)^2 + 3 \frac{m}{4} \left(\frac{a}{2\sqrt{3}} \right)^2,$$

откуда $\alpha = 1/12$. Следовательно,

$$I = \frac{1}{12} m a^2.$$

5. Если через I_x и I_y обозначить момент инерции плоской пластины относительно перпендикулярных осей x и y , лежащих в плоскости пластины, то момент инерции этой пластины относительно оси z , перпендикулярной осям x и y и проходящей через точку их пересечения, равен

$$I_z = I_x + I_y.$$

В самом деле, согласно рис. 182,

$$I_x = \sum_i y_i^2 m_i, \quad I_y = \sum_i x_i^2 m_i,$$

а, значит,

$$I_x + I_y = \sum_i (x_i^2 + y_i^2) m_i = \sum_i r_i^2 m_i = I_z.$$

За x и y можно выбрать ось c и ось c_{\perp} или c_1 и $c_{1\perp}$.

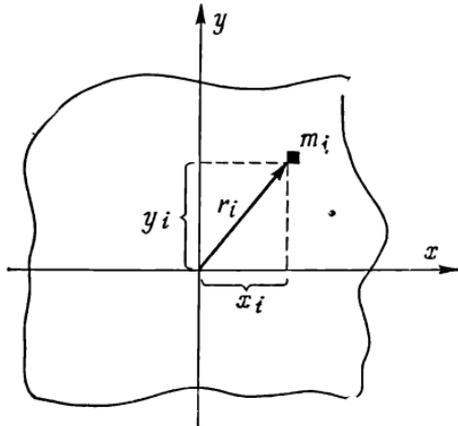


Рис. 182

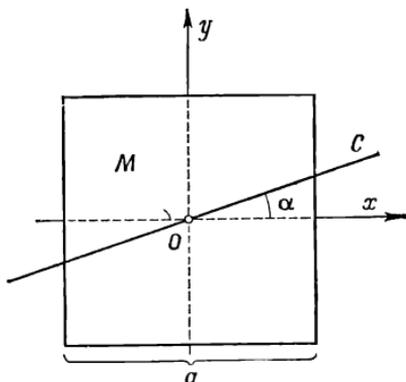


Рис. 183

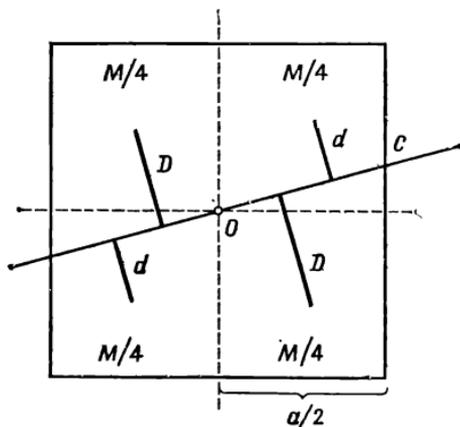


Рис. 184

Тогда мы имеем

$$I_z = I_c + I_{c_{\perp}} = I_{c_1} + I_{c_{1\perp}}.$$

Из симметрии звезды следует, что

$$I_{c_{\perp}} = I_c, \quad I_{c_{1\perp}} = I_{c_1}.$$

Следовательно, $I_{c_1} = I_c = \frac{1}{2} I_2$.

6. а) Момент инерции пластины I зависит от ее массы M , стороны a и безразмерных констант. Из анализа размерности получаем выражение для момента инерции

$$I = A M a^2,$$

где A — числовая константа, I — сумма моментов инерции четырех пластин, обозначенных на рис. 184

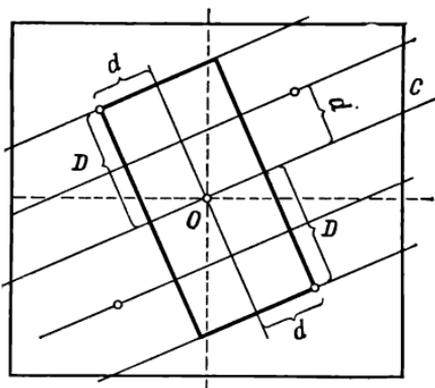


Рис. 185

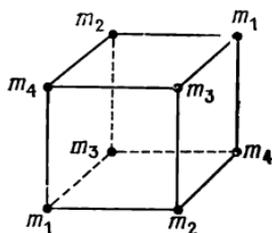


Рис. 186

и вычисленных относительно оси c . Используя теорему Штейнера, из соображений подобия можем записать

$$A M a^2 = 4 A \frac{M}{4} \left(\frac{a}{2} \right)^2 + 2 \frac{M}{4} d^2 + 2 \frac{M}{4} D^2,$$

или

$$\frac{3}{4} A a^2 = \frac{1}{2} (d^2 + D^2).$$

Величина $d^2 + D^2$ определяется чисто геометрически. Это можно сделать, например, так: через центры малых квадратов проводим прямые, параллельные оси c , а также обозначенные на рис. 185 прямые, перпендикулярные к оси c . В результате получим прямоугольник со сторонами $2d$ и $2D$, диагональ которого равна $\sqrt{2}a/2$. Значит,

$$d^2 + D^2 = \frac{a^2}{8}.$$

Учитывая это, получаем

$$\frac{3}{4} A a^2 = \frac{1}{16} a^2 \quad \text{и} \quad A = \frac{1}{12}.$$

Тогда момент инерции $I = 1/12 Ma^2$, т. е. он не зависит от угла α .

б) Утверждение, высказанное в условии задачи, неверно, поскольку можно привести опровергающий его пример.

Возьмем, например, восемь материальных точек, которые соединены легкими стержнями в куб, как показано на рис. 186. Моменты инерции относительно каждой из трех осей, проходящих через центры противоположных граней, одинаковы, однако моменты инерции относительно главной диагонали куба, вообще говоря, различны, за исключением случаев, когда величины масс m_1, m_2, m_3 и m_4 специально подобраны.

7. Из условия задачи следует, что самолет движется со скоростью, большей скорости звука, поскольку

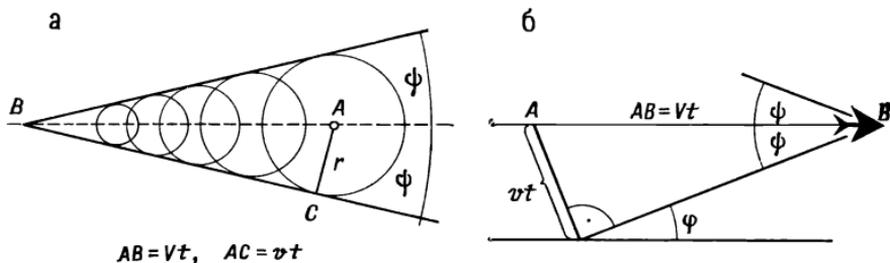


Рис. 187

ку в противном случае наблюдатель слышал бы шум самолета и тогда, когда самолет пролетает над ним, — звук опережал бы самолет. Используя принцип Гюйгенса (рис. 187), легко доказать, что волновая поверхность, идущая перед источником, движется со скоростью V , большей, чем скорость звука в данной среде, и представляет собой коническую поверхность с углом 2ψ при вершине конуса, так что $\sin \psi = v/V$. Как видно из рис. 187, б, $\psi = \varphi$, а значит,

$$V = v/\sin \varphi \quad (= 680 \text{ м/с}).$$

8. Скорость звука имеет размерность (м/с) и зависит только от p, ρ и некоторой безразмерной постоянной. Плотность и давление имеют следующие размерности: $[p] = \text{кг/м} \cdot \text{с}^2$, $[\rho] = \text{кг/м}^3$.

Скорость звука v представим как функцию давления и плотности: $v = f(p, \rho)$.

Нетрудно убедиться, что величина

$$\sqrt{\frac{\rho}{\rho}}$$

имеет заданную размерность скорости. Выражение для скорости может иметь только следующий вид:

$$v = \alpha \sqrt{\frac{\rho}{\rho}}$$

где α — численная константа.

Теперь можно определить искомое отношение скоростей:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\alpha \sqrt{\rho_1/\rho_1}}{\alpha \sqrt{\rho_2/\rho_2}} = \sqrt{\frac{\rho_1/\rho_1}{\rho_2/\rho_2}}$$

9. Прежде всего определим (на основании эффекта Доплера), какие частоты принимали бы неподвижные наблюдатели, находящиеся у каждой из скал, на протяжении участка дороги, по которой движется локомотив. Воспользовавшись формулой для частоты, принимаемой неподвижным наблюдателем, получим, что наблюдатель, находящийся перед локомотивом, будет принимать частоту

$$f_1 = \frac{f}{1 - \frac{v}{V}},$$

а наблюдатель, находящийся позади локомотива, — частоту

$$f_2 = \frac{f}{1 + \frac{v}{V}}.$$

Спустя некоторое время звук с частотой f_1 отразится от стены перед локомотивом, дойдет до стены за локомотивом и отразится от нее. Звук с частотой f_2 отразится от стены за локомотивом, дойдет до стены перед локомотивом, отразится и т. д.

Следовательно, каждая из стен «излучает» звук двух частот: f_1 и f_2 . Дальнейшее отражение звука между скалами не приводит к появлению новых частот, поскольку скалы неподвижны одна относительно другой. Таким образом, машинист будет воспринимать звуки следующих частот:

а) для звука, приходящего от стены перед локомотивом,

$$f_{I1} = \left(1 + \frac{v}{V}\right) f_1 = \frac{V+v}{V-v} f, \quad f_{II1} = \left(1 + \frac{v}{V}\right) f_2 = f;$$

б) для звука, приходящего от стены за локомотивом,

$$f_{III} = \left(1 - \frac{v}{V}\right) f_2 = \frac{V-v}{V+v} f, \quad f_{IV} = \left(1 - \frac{v}{V}\right) f_1 = f.$$

Как видим, машинист будет слышать три эха с частотами

$$\frac{V-v}{V+v} f, \quad f, \quad \frac{V+v}{V-v} f.$$

Эту задачу можно решить и другим способом. Отметим, что частота отраженного звука не зависит от того, с какой стороны (с правой или левой) приближается локомотив (рис. 188). Частота звука, издаваемого локомотивом Л и принимаемого наблюдателем Н после отражения звука от стены, будет такой же, что и частота, которую наблюдатель принимал бы в случае, если бы звук шел непосредственно от источника, находящегося «за стеной» и движущегося с той же скоростью, что и локомотив. Следовательно, систему «действительный источник Л + отражающая стена», можно заменить мнимым источником Л', являющимся зеркальным отражением источника Л относительно плоскости S. Теперь можно говорить не об отраженном звуке, а о звуке, приходящем к наблюдателю от мнимого источника Л'.

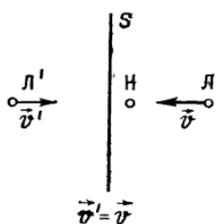


Рис. 188

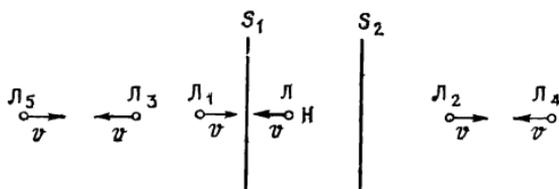


Рис. 189

В нашем случае, иллюстрируемом рис. 189, мы имеем две отражающие стены S_1 и S_2 . Пусть локомотив вместе с наблюдателем (машинистом) движется влево со скоростью v . Тогда получаем

L_1 — зеркальное отражение Л относительно S_1 , движущееся вправо со скоростью v ;

L_2 — зеркальное отражение Л относительно S_2 , движущееся также вправо со скоростью v ;

L_3 — зеркальное отражение мнимого источника L_2 относительно S_1 , движущееся влево со скоростью v ;

L_4 — зеркальное отражение мнимого источника L_1 относительно S_2 , движущееся влево со скоростью v ;

L_5 — зеркальное отражение мнимого источника L_4 относительно плоскости S_2 , движущееся вправо со скоростью v и т. д.

Получаем бесконечно много изображений источника L . Все эти изображения движутся с одинаковой скоростью, причем часть из них движется вправо, а часть — влево, кроме того, источники, имеющие одинаковые направления скоростей, располагаются как справа, так и слева относительно наблюдателя H , движущегося вместе с источником L .

Отметим, что на самом деле здесь следует различать только три случая:

а) наблюдатель H и мнимый источник L_i движутся в одну и ту же сторону, т. е. они покоятся друг относительно друга;

б) наблюдатель H и мнимый источник L_i приближаются друг к другу, обладая скоростью v относительно неподвижных стен;

в) наблюдатель H и мнимый источник L_i удаляются друг от друга, имея скорость v относительно стен.

Других вариантов нет. Очевидно, для каждого из источников L_i осуществляется одно из названных движений, причем для каждого из этих трех вариантов можно подобрать бесчисленное множество мнимых источников, реализующих такое движение. Каждому из перечисленных вариантов соответствует одна частота звука, принимаемого наблюдателем H .

В случае (а), когда источник и наблюдатель покоятся относительно друг друга, наблюдатель принимает частоту $f_a = f$. Частоты, принимаемые наблюдателем в случаях (б) и (в), определим, используя выражения для частоты, принимаемой подвижным наблюдателем от подвижного источника:

$$f_б = \frac{V+v}{V-v} f, \quad f_в = \frac{V-v}{V+v} f.$$

Приведенный здесь способ решения носит название метода изображений.

Выше отмечалось, что с точки зрения наблюдателя отраженный звук имеет такую же частоту, что и звук, приходящий непосредственно от некоего фиктивного источника-изображения. Оказывается, что это относится также к амплитуде отраженного звука и его

фазе: амплитуда и фаза отраженной волны в произвольной точке такие же, как амплитуда и фаза звуковой волны, приходящей к этой точке от некоторого мнимого источника, являющегося зеркальным отражением действительного источника. Способы построения источника-изображения (его положение, амплитуда,

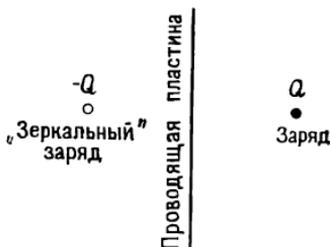


Рис. 190

фазовый сдвиг относительно действительного источника) для различных отражающих поверхностей могут быть достаточно сложными. Тем не менее метод изображений иногда значительно упрощает решение. Метод изображений широко применяется и в электростатике (рис. 190).

10. Чтобы установить взаимосвязь между полной энергией осциллятора и его моментом импульса, прежде всего определим потенциальную энергию рассматриваемого осциллятора.

Разность потенциальных энергий в точках A и B $V(B) - V(A)$ равна работе, которую нужно совершить против сил, действующих на материальную точку при перемещении ее из точки A в точку B . При перемещении материальной точки по дуге окружности, центр которой совпадает с центром силового поля, сила не совершает работы, поскольку она все время остается перпендикулярной к перемещению. Значит, потенциал точек, равноотстоящих от центра, одинаков, т. е. искомый потенциал должен зависеть только от расстояния r до центра силового поля. Для определения разности потенциалов между двумя точками, отстоящими от центра на расстояния r и r_0 , нужно определить работу, совершаемую при перемещении материальной точки вдоль радиуса. Но эта ситуация аналогична той, что имеет место в случае одномерного осциллятора типа грузика, подвешенного на пружине

(под r здесь можно понимать расстояние от положения равновесия). Следовательно, можем записать

$$V(r) - V(r_0) = \frac{k}{2} (r^2 - r_0^2).$$

Принимая, что потенциальная энергия осциллятора при $r_0 = 0$ равна нулю, имеем

$$V(r) = \frac{1}{2} kr^2.$$

Теперь определим кинетическую энергию. Из второго закона Ньютона для движения по окружности имеем

$$\frac{mv^2}{r} = kr. \quad \text{Тогда} \quad E_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} kr^2.$$

Полная энергия осциллятора равна сумме потенциальной и кинетической энергий:

$$E = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kr^2 = kr^2.$$

Момент импульса рассматриваемой системы равен

$$I = mvr = mr^2 \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Тогда

$$\frac{E}{I} = \frac{k}{m} \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{и} \quad E = \sqrt{\frac{k}{m}} I.$$

Учитывая постулат Бора, получаем

$$E = n\hbar\omega,$$

где $\omega = \sqrt{k/m}$ — частота осциллятора.

Интерпретация ω как частоты колебаний осциллятора имеет общий характер, не связанный с частным случаем движения по круговой орбите. В этом легко убедиться, записав уравнения Ньютона для движения по трем координатным осям:

$$ma_x = -kx, \quad ma_y = -ky, \quad ma_z = -kz.$$

Эти три независимых уравнения описывают одномерные гармонические колебания с той же частотой $\omega = \sqrt{k/m}$. Функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ изменяются с той же частотой ω , следовательно, ω является частотой колебания осциллятора в общем случае, а не только в случае круговых орбит.

Выражение $E = n\hbar\omega = nh\nu$ для энергии колебаний гармонического осциллятора было предложено

Максом Планком (примерно на 10 лет ранее появления квантового постулата Бора) для описания излучения абсолютно черного тела. Нужно отметить, что к таким объектам, как атомы и молекулы, не всегда применимы законы и понятия классической механики, даже дополненные определенными понятиями и постулатами квантовой механики типа постулата Бора. Даже такое понятие, как траектория, в микромире утрачивает смысл. То, что постулат Бора позволил получить некоторые выводы, согласующиеся с опытом, до некоторой степени оказалось счастливой случайностью. Дело в том, что, в частности, для атома водорода и для гармонического осциллятора точная теория дает почти тот же результат, что и модель Бора. Однако в более сложных случаях модель Бора оказывается неприменимой.

11. После прохождения через поляризатор Π_1 свет будет поляризоваться линейно и его интенсивность I_1 будет равна $\frac{1}{2} I_0$.

Пусть плоскость поляризации поляризатора Π_2 составляет угол β с плоскостью поляризации Π_1 . Пройдя через Π_2 , свет будет иметь интенсивность

$$I_2 = I_1 \cos^2 \beta,$$

а после прохождения света через поляризатор Π_3 его интенсивность

$$I_3 = I_2 \cos^2 (90^\circ - \beta) = I_2 \sin^2 \beta.$$

После отражения от зеркала свет вновь попадает на поляризатор Π_3 , поскольку он поляризован в плоскости поляризации этого поляризатора, но после вторичного прохождения через Π_3 интенсивность света не изменится. После второго прохождения через Π_2 интенсивность света

$$I_4 = I_3 \cos^2 (90^\circ - \beta) = I_3 \sin^2 \beta$$

и после второго прохождения через Π_1 интенсивность света оказывается равной

$$I_5 = I_4 \cos^2 \beta. \quad \text{Наконец,} \quad I_5 = \frac{1}{32} I_0 \sin^4 2\beta.$$

Искомая интенсивность I равна максимальному значению I_5 и, очевидно, равна $1/32 I_0$. Это значение достигается тогда, когда плоскость пропускания поляризатора Π_2 составляет угол 45° с плоскостью пропускания поляризатора Π_1 и Π_3 (при этом $\sin 2\beta = \pm 1$).

Перейдем теперь ко второй части задачи. Поместим между Π_1 и Π_3 систему поляризаторов $\Pi'_1, \dots, \Pi'_{n-1}$ ($n > 1$). Пусть плоскости пропускания каждого из поляризаторов системы

$$\Pi_1, \Pi'_1, \Pi'_2, \dots, \Pi'_{n-1}, \Pi_3$$

сдвинуты на угол $\beta = \frac{1}{2} \frac{\pi}{n}$.

Конечная интенсивность пучка света будет теперь равна

$$I_k = \frac{1}{2} \cos^{4n} \left(\frac{\pi/2}{n} \right) I_0.$$

При $n \rightarrow \infty$ это значение стремится к $\frac{1}{2} I_0 > I = \frac{1}{32} I_0$. Поскольку после прохождения света через первый поляризатор его интенсивность падает до $I_0/2$, наибольшее значение интенсивности пучка света, прошедшего через систему поляризаторов, составляет $I_0/2$. Для полноты решения приведем доказательство того, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{4n}(\pi/2n) = 1$. Прежде всего отметим, что

$$1 \geq \cos \alpha \geq 1 - \frac{\alpha^2}{2}.$$

Согласно неравенству Бернулли, $(1 - x)^n \geq 1 - nx$. Поэтому

$$1 \geq \left(\cos \frac{\pi}{2n} \right)^{4n} \geq \left(1 - \frac{\pi^2}{8n^2} \right)^{4n} \geq \left(1 - \frac{\pi^2}{2n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{\pi}{2n} \right)^{4n} = 1$.

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{1}{2} I_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{\pi}{2n} \right)^{4n} = \frac{1}{2} I_0.$$

12. Поляризованный луч света, обозначенный на рис. 191 номером 1, после прохождения через поляризатор Π_1 обладает интенсивностью

$$I_1 = I_0 \cos^2 \alpha,$$

а после прохождения через поляризатор Π_2 — интенсивностью

$$I_2 = I_1 \cos^2(\beta - \alpha). \quad \text{Значит,} \quad I_2 = I_0 \cos^2 \alpha \cos^2(\beta - \alpha).$$

Поляризованный луч, обозначенный номером 2, после прохождения через Π_2 имеет интенсивность

$$I'_1 = I_0 \cos^2 \beta,$$

а после прохождения через поляризатор Π_1 — интенсивность

$$I'_2 = I'_1 \cos^2(\alpha - \beta) = I_0 \cos^2 \beta \cos^2(\beta - \alpha).$$

Очевидно, что $I'_2 \neq I_2$.

Интенсивность неполяризованного света после прохождения через первый встреченный поляризатор была бы равна

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0 = I'_1,$$

поскольку среднее значение квадрата косинуса равно $1/2$. После прохождения через второй поляризатор ин-

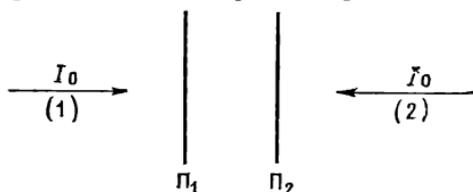


Рис. 191

тенсивность неполяризованного света равнялась бы

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 \cos^2(\beta - \alpha) = I'_2,$$

т. е. была бы отличной от интенсивности света в предыдущем случае.

13. Если расстояние от центра звезды обозначить через r , а частоту фотона у поверхности звезды — через ν_0 , то из закона сохранения энергии (кинетическая энергия фотона с частотой ν равна $h\nu$) следует

$$h\nu \left(1 - \frac{GM}{c^2 r}\right) = h\nu_0 \left(1 - \frac{GM}{c^2 R}\right),$$

где G — гравитационная постоянная.

Для бесконечно большого r имеем

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{GM}{c^2 R}\right),$$

но $\nu \geq 0$, а значит, предельный радиус звезды R' равен

$$R = \frac{GM}{c^2}$$

(для Солнца $R \sim 1$ км).

Найденное значение R отличается от значения, полученного из общей теории относительности Эйнштейна, коэффициентом 2.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора перевода 5

ЗАДАЧИ

Введение	9
Электрические цепи	12
Соударения	17
Колебания	21
«Полотер»	25
Отражение и преломление	27
Плоскость, транспортер, винт, шар, вал	29
Равновесие и устойчивость	32
Электромагнитные явления	40
Разное	45

РЕШЕНИЯ

Электрические цепи	50
Соударения	76
Колебания	94
«Полотер»	130
Отражение и преломление	136
Плоскость, транспортер, винт, шар, вал	161
Равновесие и устойчивость	187
Электромагнитные явления	225
Разное	239

Вальдемар Горшковский

ПОЛЬСКИЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

Научный редактор А. Н. Кондрашова. Мл. научный редактор Л. И. Леонова.
Художник Н. Н. Дронова. Художественный редактор Л. Е. Безрученков.
Технический редактор Н. Б. Панфилова. Корректор И. И. Дериколенко.

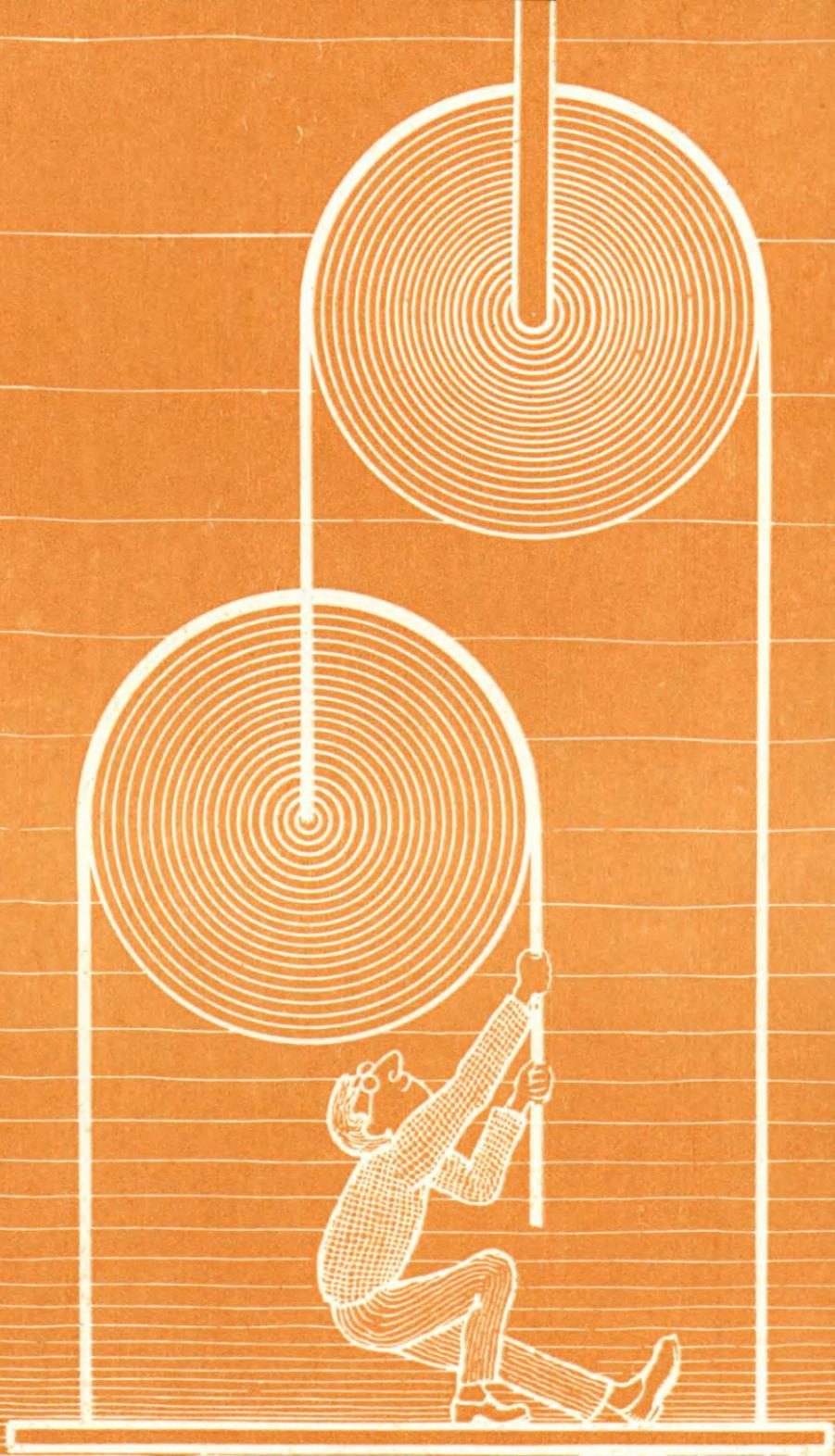
ИБ № 3023

Сдано в набор 02.09.81. Подписано к печати 15.02.82. Формат 84×108¹/₃₂.
Бумага типографская № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая.
Объем 4,00 бум. л. Усл. печ. л. 13,44. Усл. кр.-отг. 13,73. Уч.-изд. л. 10,56.
Изд. № 12/1876. Тираж 100 000 экз. Зак. 1312. Цена 55 коп.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

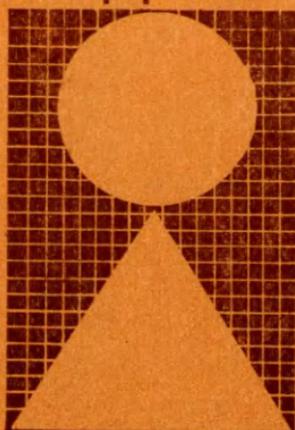
129820, Москва, И-110, ГСП 1-й Рижский пер., 2.

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового
Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга»
им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете
СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 198052,
г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29



55 коп.

ЗАДАЧИ



И ОЛИМПИАДЫ